Н. Н. БУХГОЛЬЦ

ОСНОВНОЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ
С. М. ТАРГОМ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для государственных университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

531
Б 94
УДК 531/534

Николай Николаевич Бухгольц
Основной курс теоретической механики
Часть II
М., 1966 г., 332 стр. с илл.
Редактор *И. А. Маркузон*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *О. А Сигал*

Сдано в набор 22/II 1966 г. Подписано к печати 31/V 1966 г. Бумага 60×90¹/₁₆.
Физ. печ. л. 20,75. Условн. печ. л. 20,75. Уч.-изд. л. 19,95. Тираж 25 000 экз.
Т-08230. Цена книги 66 коп. Заказ № 90.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

2-4-2
281—66

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

«Основной курс теоретической механики» профессора Н. Н. Бухгольца (1880—1944), выдержавший при жизни автора несколько изданий, зарекомендовал себя как хороший учебник для студентов университетов и ценное пособие, которым могут пользоваться студенты других вузов, а также инженеры, желающие пополнить и углубить свои знания в области механики.

Вторая часть этого курса, как и первая, построена на материале лекций, читанных автором в течение многих лет в Московском государственном университете, и содержит динамику системы материальных точек, динамику твердого тела и начала аналитической механики; подробнее содержание книги видно из оглавления. Несмотря на сравнительно небольшой объем книги, весь материал в ней изложен с достаточной полнотой и иллюстрируется целым рядом задач и примеров.

При подготовке к печати настоящего издания (предыдущее третье издание вышло в свет в 1945 г.) часть материала книги подверглась переработке и в нее внесен ряд дополнений, учитывающих, в частности, и изменения в программе университетского курса теоретической механики; одновременно устранены замеченные погрешности и опечатки.

Наиболее существенные изменения внесены в материал п. 1 § 17, пп. 1 и 3 § 18 и п. 8 § 26. Добавлены п. 8 в § 2, § 4, пп. 3 и 11 в § 8, п. 6 в § 9, пп. 4 и 6 в § 26 и п. 4 в § 30. Небольшие изменения и добавления сделаны и во многих других местах книги. Кроме того, в бо́льшую часть параграфов добавлены задачи и примеры.

Как и в первой части, нумерация параграфов для удобства ссылок сделана общей по всей книге. Термин «материальная частица» заменен на принятый в первых изданиях термин «материальная точка»; изменен также в целях единообразия ряд обозначений в гл. VIII. Все остальные термины и обозначения, принятые автором, в основном сохранены.

Внесенные при переработке материала изменения и дополнения в тексте книги специально не оговариваются; это лишь мешало бы пользоваться книгой как учебником.

При чтении книги следует иметь в виду, что все содержащиеся в ней ссылки на первую часть даются по шестому изданию [1]).

С. М. Тарг

[1]) Н. Н. Бухгольц, Основной курс теоретической механики, часть первая, изд. шестое, Изд-во «Наука», 1965.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 1. Основные понятия. Связи

1. Механическая система. Виды связей. Механической системой называется такое множество материальных точек, в котором движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы. Условия, налагающие ограничения на движение точек системы, называются связями; эти условия аналитически выражаются в виде уравнений, связывающих между собой координаты и скорости точек системы, а также время (см. ч. I, § 14, п. 5). Уравнение неосвобождающей связи дается равенством вида

$$f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n;\ \dot{x}_1,\ \dot{y}_1,\ \dot{z}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{y}_2,\ \dot{z}_2,\ \ldots,\ \dot{x}_n,\ \dot{y}_n,\ \dot{z}_n;\ t)=0,$$

где n есть число точек системы, или, сокращенно,

$$f(x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z};\ t)=0\ ^{1)}. \tag{1}$$

Для освобождающей же связи это уравнение имеет вид неравенства

$$f(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t)\geqslant 0. \tag{1'}$$

Так как при движении системы координаты x, y, z и скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ являются функциями времени, то время в уравнения связи входит неявно через эти аргументы; кроме того, оно может входить и явно. Связь, не зависящая явно от времени, называется склерономной или стационарной; если же связь явно зависит от времени, то

[1]) При отсутствии индексов условимся в выражениях вида $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ под x понимать всю совокупность величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, под y — совокупность $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и т. д.

она называется реономной или нестационарной. Уравнение склерономной связи имеет вид

$$f(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})=0, \tag{2}$$

а связь, выражаемая уравнением вида (1), будет реономной.

Уравнения (1) и (2) определяют связи, налагающие ограничения не только на координаты точек системы, но и на их скорости; такие связи носят название кинематических или дифференциальных связей. Связь, которая налагает ограничение только на положения точек системы и, следовательно, выражается уравнением, связывающим только координаты этих точек, называется геометрической или конечной связью; уравнение геометрической связи имеет вид

$$f(x,\ y,\ z;\ t)=0 \quad \text{или} \quad f(x,\ y,\ z)=0. \tag{3}$$

Мы ограничимся рассмотрением кинематических связей, которые выражаются уравнениями, линейными относительно скоростей точек системы. Эти уравнения, если связи реономны, имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\dot{x}_\nu+b_\nu\dot{y}_\nu+c_\nu\dot{z}_\nu)+a=0, \tag{4}$$

где a_ν, b_ν, c_ν, a суть функции координат x, y, z и, возможно, времени t, т. е.

$$a_\nu,\ b_\nu,\ c_\nu,\ a\left|\begin{matrix}x,\ y,\ z,\\ t\end{matrix}\right. .$$

Если же эти связи склерономны, то они выразятся уравнениями вида

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\dot{x}_\nu+b_\nu\dot{y}_\nu+c_\nu\dot{z}_\nu)=0, \tag{5}$$

где a_ν, b_ν, c_ν зависят только от координат x, y, z.

Умножая уравнения (4) и (5) на dt, получим выражения уравнений кинематических связей в виде

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\,dx_\nu+b_\nu\,dy_\nu+c_\nu\,dz_\nu)+a\,dt=0 \tag{4a}$$

для реономной связи и

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\,dx_\nu+b_\nu\,dy_\nu+c_\nu\,dz_\nu)=0 \tag{5a}$$

для склерономной связи. Левые части уравнений (4a) и (5a) представляют собой линейные формы относительно дифференциалов координат и, может быть, времени; если эти линейные дифференциальные многочлены являются полными дифференциалами какой-нибудь функции координат и времени (т. е. интегрируются), то после интегрирования дифференциальная связь перестает быть таковой и становится конечной связью, налагающей условия только на координаты точек системы, т. е. геометрической связью. Следовательно, связь будет дифференциальной только в том случае, если она неинтегрируема.

По терминологии Г. Герца механическая система, имеющая только связи, выраженные в конечной форме (геометрические), называется голономной; если же на систему наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется неголономной.

Примерами неголономных систем являются твердые тела, вынужденные катиться без скольжения по какой-либо шероховатой поверхности. Кинематический характер такой связи виден из того, что скорость точки касания тела с поверхностью должна равняться нулю. Если уравнения, выражающие это условие, не могут быть проинтегрированы, то связь будет неголономной.

Примеры. 1. Колесо радиуса R катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. 1). Положение колеса в плоскости движения Oxy определяется координатами x_C, y_C центра C колеса (полюса) и углом поворота φ. Если ось x направить вдоль рельса, то $y_C = R$ (геометрическая связь). Кроме того, должна быть равна нулю скорость точки касания K колеса с рельсом; это условие дает $\dot{x}_C - R\dot{\varphi} = 0$ (кинематическая связь). Но данное уравнение сразу интегрируется и приводит к соотношению между координатами x_C и φ, имеющему вид $x_C - R\varphi = \text{const}$. Таким образом, рассмотренная система является голономной.

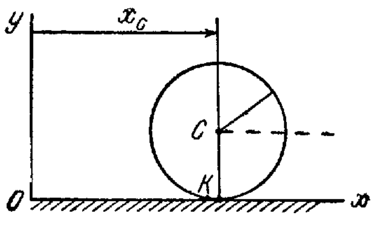


Рис. 1.

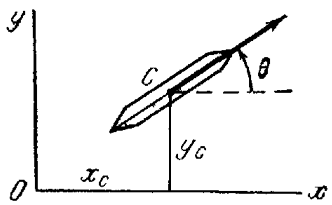


Рис. 2.

2. Колесико планиметра (с острым, режущим краем) катится без скольжения по горизонтальной плоскости, оставаясь перпендикулярным к этой плоскости; вид колесика в проекции на горизонтальную плоскость Oxy показан на рис. 2. Положение колесика определяется координатами x_C, y_C его центра C ($z_C = R$, где R — радиус колесика), углом θ, который плоскость колесика образует с осью x, и углом поворота φ колесика вокруг его оси (на рисунке не показан). Так как скорость точки касания колесика с плоскостью равна нулю, то скорость центра колеса $v_C = R\dot{\varphi}$. Наличие острого края, не допускающего перемещение колесика в направлении, перпендикулярном к его плоскости, требует, чтобы вектор $\boldsymbol{v}_C$ все время лежал

в плоскости колесика. Это приводит к следующим двум соотношениям между координатами x_C, y_C, φ, θ:

$$\dot{x}_C = R\dot{\varphi}\cos\theta, \quad \dot{y}_C = R\dot{\varphi}\sin\theta. \tag{a}$$

Уравнения (а), когда $\theta \neq \text{const}$, не могут быть проинтегрированы; следовательно, система является неголономной.

3. Положение шара радиуса R, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 3), определяется координатами x_C, y_C, z_C его центра и тремя углами поворота вокруг центра, например углами Эйлера φ, ψ, θ [ч. I, § 7 (рис. 80)]. Так как скорость точки касания K должна быть равна нулю, то скорость центра C удовлетворяет векторному равенству $\boldsymbol{v}_C + (\boldsymbol{\omega} \times \overline{CK}) = 0$, где $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость шара. Учитывая, что проекции вектора $\overline{CK}$ на неподвижные оси $Oxyz$ равны 0, 0, $-R$, получим в проекциях на оси

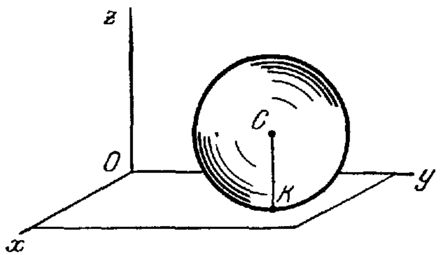


Рис. 3.

$$\dot{x}_C - R\omega_y = 0, \quad \dot{y}_C + R\omega_x = 0, \quad \dot{z}_C = 0. \tag{б}$$

Последнее уравнение интегрируется и дает геометрическое условие $z_C = R$. Первые же два уравнения неинтегрируемы, в чем можно убедиться, выразив ω_x и ω_y через углы φ, ψ, θ и их производные по времени [эти выражения даются ниже уравнениями (4) в § 14, где $p' = \omega_x$, $q' = \omega_y$]. Следовательно, данная система также является неголономной.

2. Условия, налагаемые связями на вариации координат. Рассмотрим голономную систему из n материальных точек, на которую наложено k конечных связей, выражаемых уравнениями вида

$$f_\varkappa(x, y, z; t) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда число независимых координат этой системы будет равно $3n - k$ (см. ч. I, § 14, п. 6). Дадим системе некоторое виртуальное перемещение, вследствие которого координаты точек системы получат приращения, равные вариациям этих координат

$$\delta x_\nu, \ \delta y_\nu, \ \delta z_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти вариации, число которых равно $3n$, не будут независимыми, так как вследствие наложенных конечных связей они должны удовлетворять k условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu}\delta z_\nu \right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \tag{6}$$

которые мы получим, варьируя уравнения связей (см. ч. I, § 28, п. 2). Следовательно, число независимых вариаций будет равно $3n - k$, т. е. числу независимых координат системы.

Предположим теперь, что система неголономна и на нее, кроме конечных связей, выражаемых уравнениями вида

$$f_\varkappa(x, y, z; t) = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

наложено еще r дифференциальных (неинтегрируемых) связей, уравнения которых имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} dx_\nu + b_{\rho\nu} dy_\nu + c_{\rho\nu} dz_\nu) + a_\rho dt = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r). \quad (7)$$

Уравнения (7) связывают между собой проекции dx, dy, dz истинных перемещений точек системы, совершаемых за элементарный промежуток времени dt. При виртуальном перемещении изменения координат точек системы выражаются их вариациями δx, δy, δz, причем $\delta t = 0$, так как виртуальное перемещение есть изменение положения системы, соответствующее данному моменту (при определении этих перемещений время не варьируется). Поэтому уравнение, связывающее между собой вариации координат δx, δy, δz, мы получим из уравнения (7) путем замены дифференциалов вариациями, принимая во внимание, что $\delta t = 0$; следовательно, дифференциальные связи типа (7) налагают на вариации координат условия

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} \delta x_\nu + b_{\rho\nu} \delta y_\nu + c_{\rho\nu} \delta z_\nu) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r). \quad (8)$$

Отсюда ясно, что при дифференциальных связях, так же как и при конечных, виртуальные перемещения совпадают с истинными только в том случае, если связь склерономна, т. е. если уравнение дифференциальной связи имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} dx_\nu + b_{\rho\nu} dy_\nu + c_{\rho\nu} dz_\nu) = 0,$$

причем $a_{\rho\nu}$, $b_{\rho\nu}$, $c_{\rho\nu}$ будут функциями только координат, но не времени, входящего явно.

Итак, пусть на систему наложено k конечных связей, выражаемых уравнениями вида

$$f_\varkappa(x, y, z; t) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

и r дифференциальных неинтегрируемых связей, уравнения которых имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} dx_\nu + b_{\rho\nu} dy_\nu + c_{\rho\nu} dz_\nu) + a_\rho dt = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r).$$

Число независимых координат системы будет равно $3n - k$, где n есть число точек системы. Вариации же координат будут связаны

условиями

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} \delta x_\nu + b_{\rho\nu} \delta y_\nu + c_{\rho\nu} \delta z_\nu) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r).$$

Число этих условий равно $k + r$, следовательно, число независимых вариаций равно $3n - (k + r)$. Отсюда следует, что в неголономных системах число независимых вариаций меньше числа независимых координат системы, тогда как для голономных систем эти числа совпадают.

Числом степеней свободы системы будем называть число независимых вариаций координат. Тогда для голономной системы число степеней свободы *равно* числу независимых координат, а для неголономной системы *меньше* числа независимых координат.

Обратимся к примерам, рассмотренным в конце п. 1. В примере 1 координаты x_C, y_C, φ колеса удовлетворяют уравнениям $y_C = R$, $x_C - R\varphi = \mathrm{const}$. Следовательно, положение колеса определяется одной координатой, например x_C; число степеней свободы колеса также равно единице.

В примере 2 положение колесика определяется четырьмя координатами x_C, y_C, φ, θ. Но вариации этих координат, согласно уравнениям (а), связаны соотношениями

$$\delta x_C = R\delta\varphi \cos\theta, \qquad \delta y_C = R\delta\varphi \sin\theta.$$

Следовательно, независимых вариаций будет две, например $\delta\varphi$ и $\delta\theta$, и колесико имеет две степени свободы.

В примере 3 число координат системы равно пяти: x_C, y_C и углы φ, ψ, θ. Но вариации этих координат будут связаны двумя соотношениями, вытекающими из первых двух равенств системы (б). Следовательно, шар имеет три степени свободы.

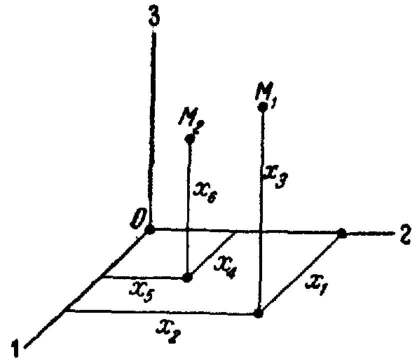


Рис. 4.

3. Иногда бывает удобно обозначать координаты точек одной буквой с различными индексами, соответствующими координатным осям, которые в свою очередь обозначаются номерами 1, 2, 3 (рис. 4). Так, например, координаты

точки M_1 вместо x_1, y_1, z_1 обозначаются x_1, x_2, x_3,
точки M_2 вместо x_2, y_2, z_2 обозначаются x_4, x_5, x_6,
. . . .
точки M_n вместо x_n, y_n, z_n обозначаются x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}.

Массы этих точек для удобства суммирования обозначаются одной буквой с теми же индексами, что и координаты этих точек; например, масса точки M_1 обозначается или m_1, или m_2, или m_3, причем, конечно, $m_1 = m_2 = m_3$; масса точки M_2 обозначается или m_4, или m_5, или m_6, причем $m_4 = m_5 = m_6$; масса точки M_n обозначается или m_{3n-2}, или m_{3n-1}, или m_{3n}, причем $m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n}$. Такими обозначениями мы будем иногда пользоваться.

§ 2. Основные динамические величины

1. Рассмотрим систему n материальных точек, находящихся в движении. Тогда в любой момент времени количество движения каждой точки системы с массой m_ν будет изображаться вектором $m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$, приложенным в этой точке. Приведем систему векторов $m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$ к какому-нибудь центру O (рис. 5). В результате получим: 1) главный вектор[1])

$$\boldsymbol{Q} = \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu,$$

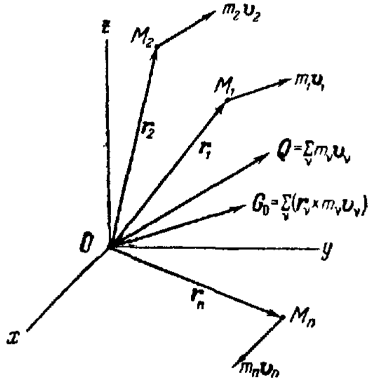


Рис. 5.

который равен геометрической сумме количеств движения всех точек системы и называется *главным вектором количеств движения системы* или просто *количеством движения системы*, и 2) главный момент

$$\boldsymbol{G}_O = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu),$$

который равен геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно центра O и носит название *главного момента количеств движения системы* или *кинетического момента системы* относительно центра O.

2. Количество движения системы. Преобразуем выражение количества движения системы

$$\boldsymbol{Q} = \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu.$$

Так как $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, то

$$\boldsymbol{Q} = \sum_\nu m_\nu \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu.$$

[1]) Условимся в дальнейшем для краткости во всех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, вместо $\sum\limits_{\nu=1}^{n}$ писать просто $\sum\limits_\nu$ или $\sum$.

Но из формулы, определяющей радиус-вектор $\boldsymbol{r}_C$ центра масс системы, следует, что

$$\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu = M \boldsymbol{r}_C,$$

где $M = \sum\limits_\nu m_\nu$ есть масса всей системы; поэтому

$$\boldsymbol{Q} = M \frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt} = M \boldsymbol{v}_C, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{v}_C$ есть скорость центра масс. Отсюда имеем теорему: *количество движения системы равно количеству движения, которое имел бы центр масс системы, если бы в нем была сосредоточена масса всей системы*. Иными словами, количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Проекции количества движения системы на оси координат будут

$$Q_x = \sum_\nu m_\nu \dot{x}_\nu = M \dot{x}_C, \quad Q_y = \sum_\nu m_\nu \dot{y}_\nu = M \dot{y}_C,$$
$$Q_z = \sum_\nu m_\nu \dot{z}_\nu = M \dot{z}_C.$$

Из доказанной теоремы следует, что количество движения системы по отношению к любым осям $Cx'y'z'$, имеющим начало в центре масс C и перемещающимся вместе с этим центром, равно нулю, так как относительно этих осей $\boldsymbol{v}_C = 0$. В частности, очевидно, будет равно нулю количество движения твердого тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс этого тела.

3. Кинетический момент системы. Кинетическим моментом относительно центра O называется, как было указано выше, векторная величина, определяемая равенством

$$\boldsymbol{G}_O = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}\right). \qquad (2)$$

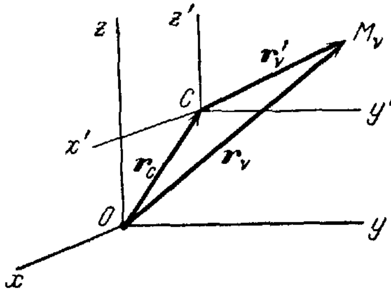


Рис. 6.

Преобразуем это выражение. Проведем через центр масс C системы оси $Cx'y'z'$ (рис. 6), которые будут перемещаться по отношению к основной инерциальной системе отсчета $Oxyz$ *поступательно* вместе с центром масс. Обозначим радиус-вектор любой точки M_ν системы с массой m_ν по отношению к осям $Oxyz$ через $\boldsymbol{r}_\nu$, а по отношению к осям $Cx'y'z'$ через $\boldsymbol{r}'_\nu$; радиус-вектор центра масс назовем $\boldsymbol{r}_C$. Тогда

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_\nu. \qquad (3)$$

Если система движется, то $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{r}_C$ и $\boldsymbol{r}'_\nu$ суть функции времени; поскольку равенство (3) имеет место в любой момент времени, то

$$\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}. \tag{4}$$

Подставляя выражения (3) и (4) в равенство (2), получим

$$\boldsymbol{G}_O=\sum_\nu\left[(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_\nu)\times m_\nu\left(\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)\right].$$

Раскрывая скобки и обозначая скорость $\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}$ центра масс через $\boldsymbol{v}_C$, находим

$$\boldsymbol{G}_O=\sum_\nu(\boldsymbol{r}_C\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)+\sum_\nu\left(\boldsymbol{r}_C\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)+\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)+\sum_\nu\left(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right).$$

Заметим, что

$$\sum_\nu m_\nu=M,\quad \sum_\nu m_\nu\boldsymbol{r}'_\nu=M\boldsymbol{r}'_C=0;$$

здесь M — масса системы, а $\boldsymbol{r}'_C=0$, так как $\boldsymbol{r}'_C$ есть радиус-вектор точки C в осях $Cx'y'z'$. Тогда будем иметь следующие очевидные равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_\nu(\boldsymbol{r}_C\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C,\\
&\sum_\nu\left(\boldsymbol{r}_C\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)=\boldsymbol{r}_C\times\sum_{\nu=1}^n m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}=\\
&\qquad=\boldsymbol{r}_C\times\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^n m_\nu\boldsymbol{r}'_\nu=0,\\
&\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)=\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{r}'_\nu\times\boldsymbol{v}_C=0,\\
&\sum_\nu\left(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)=\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu),
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{v}'_\nu$ есть скорость точки с массой m_ν относительно осей $Cx'y'z'$. На основании этих равенств получим выражение кинетического

момента $\boldsymbol{G}_O$ в виде

$$\boldsymbol{G}_O=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu). \tag{6}$$

Первый член правой части есть момент относительно центра O количества движения, которое имел бы центр масс системы, если бы в нем была сосредоточена масса всей системы. Второй член

$$\boldsymbol{G}'_C=\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu)$$

представляет собой сумму моментов относительно центра масс количеств движения точек системы в ее движении по отношению к подвижной системе отсчета $Cx'y'z'$.

Отсюда получаем теорему: *кинетический момент системы относительно какого-нибудь неподвижного центра равен моменту относительно этого центра количества движения центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, сложенному с кинетическим моментом системы относительно центра масс в ее движении по отношению к подвижной системе отсчета, перемещающейся вместе с центром масс поступательно*, т. е.

$$\boldsymbol{G}_O=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{G}'_C. \tag{6'}$$

Равенство (6′) можно еще представить в виде

$$\boldsymbol{G}_O=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{G}_C, \tag{6''}$$

где $\boldsymbol{G}_C=\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_\nu)$. В самом деле, так как, согласно формуле (4), $\boldsymbol{v}_\nu=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_\nu$, то, учитывая третье из равенств (5), будем иметь

$$\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_\nu)=\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)+\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu)=\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu),$$

или $\boldsymbol{G}_C=\boldsymbol{G}'_C$.

Если перейти к декартовым координатам, положив

$$\boldsymbol{r}_\nu=x_\nu\boldsymbol{i}+y_\nu\boldsymbol{j}+z_\nu\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}'_\nu=x'_\nu\boldsymbol{i}+y'_\nu\boldsymbol{j}+z'_\nu\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_C=x_C\boldsymbol{i}+y_C\boldsymbol{j}+z_C\boldsymbol{k},$$

то проекции кинетического момента системы на оси координат, или, что то же, кинетические моменты системы относительно координатных осей, выразятся так:

$$\left.\begin{aligned}
G_x &= \sum_\nu m_\nu (y_\nu \dot{z}_\nu - z_\nu \dot{y}_\nu) = \\
&= M(y_C \dot{z}_C - z_C \dot{y}_C) + \sum_\nu m_\nu (y'_\nu \dot{z}'_\nu - z'_\nu \dot{y}'_\nu); \\
G_y &= \sum_\nu m_\nu (z_\nu \dot{x}_\nu - x_\nu \dot{z}_\nu) = \\
&= M(z_C \dot{x}_C - x_C \dot{z}_C) + \sum_\nu m_\nu (z'_\nu \dot{x}'_\nu - x'_\nu \dot{z}'_\nu); \\
G_z &= \sum_\nu m_\nu (x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) = \\
&= M(x_C \dot{y}_C - y_C \dot{x}_C) + \sum_\nu m_\nu (x'_\nu \dot{y}'_\nu - y'_\nu \dot{x}'_\nu).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

4. Перемена центра приведения. Как было сказано в п. 1 этого параграфа, количество движения системы $\boldsymbol{Q}$ и кинетический момент системы $\boldsymbol{G}_O$ относительно центра O являются соответственно главным вектором и главным моментом относительно того же центра системы векторов $m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$, представляющих собою количества движения точек системы. Если взять другой центр приведения O', то, очевидно, главный вектор $\boldsymbol{Q}$ останется без изменения, а главный момент, т. е. в данном случае кинетический момент системы относительно центра O', будет уже иной. В самом деле, так как (рис. 7)

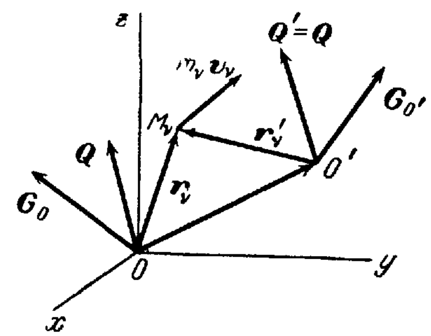


Рис. 7.

$$\boldsymbol{G}_{O'} = \sum_\nu (\boldsymbol{r}'_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu)$$

и

$$\boldsymbol{r}'_\nu = \boldsymbol{r}_\nu - \overline{OO'},$$

то

$$\boldsymbol{G}_{O'} = \sum_\nu [(\boldsymbol{r}_\nu - \overline{OO'}) \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu] =$$
$$= \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) - \overline{OO'} \times \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu,$$

откуда, принимая во внимание, что $\sum\limits_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{Q}$, получим

$$\boldsymbol{G}_{O'} = \boldsymbol{G}_O - \overline{OO'} \times \boldsymbol{Q}. \tag{8}$$

В частном случае, если точка O' является центром масс C системы, равенство (8) дает формулу (6″).

5. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения. В качестве примера найдем кинетический момент относительно оси x для абсолютно твердого тела, вращающегося

вокруг этой оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 8). Кинетический момент твердого тела относительно оси Ox есть сумма моментов количеств движения всех точек тела относительно этой оси. Так как скорости точек тела перпендикулярны к оси вращения, то момент количества движения точки с массой m_ν относительно оси Ox равен $m_\nu v_\nu h_\nu$, где h_ν есть расстояние точки от оси вращения. Поэтому

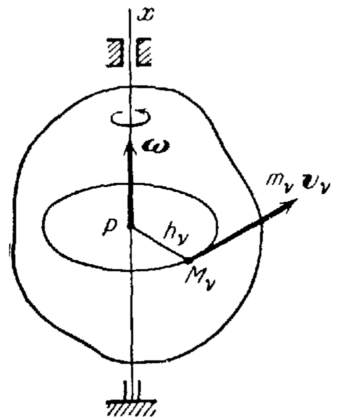


Рис. 8.

$$G_x = \sum_\nu m_\nu v_\nu h_\nu.$$

Но так как $v_\nu = h_\nu \omega$, то

$$G_x = \sum_\nu m_\nu \omega h_\nu^2 = \omega \sum_\nu m_\nu h_\nu^2.$$

Величина $\sum\limits_\nu m_\nu h_\nu^2$, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния ее до некоторой оси, называется *моментом инерции тела* относительно этой оси и играет очень важную роль в динамике твердого тела. Обозначая $\sum m_\nu h_\nu^2 = J_x$, получим

$$G_x = J_x \omega. \tag{9}$$

Найдем ту же самую величину иным путем. Кинетический момент твердого тела относительно какой-либо оси x равен проекции кинетического момента относительно любой точки этой оси на ось, т. е.

$$G_x = \boldsymbol{G}_O \cdot \boldsymbol{x}^0,$$

где $\boldsymbol{x}^0$ есть единичный вектор направления оси x. Но

$$\boldsymbol{G}_O = \sum_\nu \boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu,$$

причем

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu;$$

поэтому

$$\boldsymbol{G}_O = \sum_\nu \boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu) = \boldsymbol{\omega} \sum_\nu m_\nu r_\nu^2 - \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_\nu).$$

(Отсюда видно, что вообще кинетический момент вращающегося тела, взятый относительно какого-нибудь центра, лежащего на оси вращения, не направлен по этой оси.) Спроектируем вектор $\boldsymbol{G}_O$ на ось Ox; получим

$$G_x = \boldsymbol{G}_O \cdot \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}^0 \sum_\nu m_\nu r_\nu^2 - \sum_\nu m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \cdot \boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_\nu).$$

Так как ось Ox направлена по оси вращения, то (рис. 9)

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}^0=\omega,\quad \boldsymbol{r}_\nu\cdot\boldsymbol{x}^0=OP=x_\nu;\quad \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_\nu=\omega x_\nu;$$

отсюда

$$G_x=\omega\sum_\nu m_\nu r_\nu^2-\omega\sum_\nu m_\nu x_\nu^2=\omega\sum_\nu m_\nu\left(r_\nu^2-x_\nu^2\right),$$

или, так как $r_\nu^2-x_\nu^2=h_\nu^2$, где h_ν есть расстояние точки M_ν до оси вращения,

$$G_x=\omega\sum_\nu m_\nu h_\nu^2=J_x\omega.$$

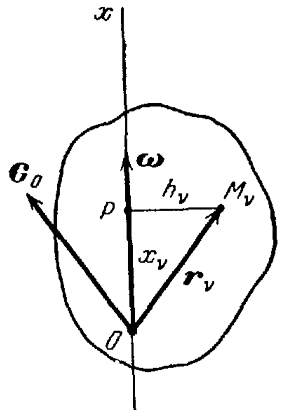


Рис. 9.

6. Кинетическая энергия системы. *Кинетической энергией системы* называется скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек системы. Если скорость точки с массой m_ν обозначим через $\boldsymbol{v}_\nu$, то кинетическая энергия системы будет

$$T=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu^2, \tag{10}$$

где сумма распространяется на все точки системы.

Введем опять систему осей $Cx'y'z'$, перемещающихся вместе с центром масс поступательно (см. рис. 6). Тогда, согласно равенству (4), будем иметь

$$\boldsymbol{v}_\nu=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_\nu,$$

где $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс, $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки с массой m_ν в основной системе отсчета $Oxyz$, $\boldsymbol{v}'_\nu$ — скорость той же точки по отношению к подвижным осям $Cx'y'z'$.

Подставляя это значение $\boldsymbol{v}_\nu$ в выражение кинетической энергии (10), найдем, что

$$T=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_\nu)^2=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_C^2+\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}'_\nu+\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu'^2.$$

Преобразуем члены правой части. Получаем

$$\sum_\nu m_\nu v_C^2=v_C^2\cdot\sum_\nu m_\nu=Mv_C^2,$$

где $M=\sum\limits_\nu m_\nu$ — масса всей системы. Далее

$$\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}'_\nu=\boldsymbol{v}_C\cdot\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu;$$

но

$$\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu=\sum_\nu m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{r}'_\nu=\frac{d}{dt}M\boldsymbol{r}'_C=0,$$

так как $\boldsymbol{r}'_C=0$; следовательно,

$$\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}'_\nu=0.$$

В результате окончательно будем иметь

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu'^2. \tag{11}$$

Первый член правой части равенства (11) есть кинетическая энергия, которую имел бы центр масс, если бы в нем была сосредоточена масса всей системы; второй член представляет собой кинетическую энергию системы при ее движении относительно подвижной системы отсчета, имеющей начало в центре масс и перемещающейся вместе с центром масс поступательно. Следовательно, *кинетическая энергия системы равна кинетической энергии центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, сложенной с кинетической энергией системы при движении ее относительно подвижной системы отсчета, перемещающейся вместе с центром масс поступательно* (теорема Кёнига).

Предположим теперь, что система точек движется относительно подвижной системы отсчета, которая в свою очередь движется *поступательно* относительно основной инерциальной системы ориентировки с произвольной скоростью $\boldsymbol{v}_0$. Тогда, на основании теоремы о сложении скоростей, скорость какой-либо точки системы с массой m_ν относительно основной системы отсчета будет

$$\boldsymbol{v}_\nu=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'_\nu,$$

где $\boldsymbol{v}'_\nu$ есть скорость той же точки по отношению к подвижной системе отсчета В результате кинетическая энергия системы для движения относительно основной системы отсчета будет равна

$$T=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu^2=\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu'^2+\boldsymbol{v}_0\cdot\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu.$$

Но $\sum\limits_\nu m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu$ есть количество движения системы относительно подвижной системы отсчета; при этом, согласно равенству (1),

$$\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu=M\boldsymbol{v}'_C,$$

где $\boldsymbol{v}'_C$ есть скорость центра масс относительно подвижной системы отсчета, поэтому предыдущее выражение кинетической энергии может быть представлено в виде

$$T=\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu'^2+M\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}'_C. \tag{12}$$

Если $\boldsymbol{v}'_C=0$, т. е. центр масс движущейся системы точек неподвижен относительно подвижной системы отсчета, то $\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_0$ и

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu'^2,$$

т. е. мы получаем теорему Кёнига.

7. Кинетическая энергия твердого тела. Найдем сначала кинетическую энергию абсолютно твердого тела, движущегося поступательно. Тогда для любой точки тела $\boldsymbol{v}_\nu=\boldsymbol{v}_C$, где $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс, и

$$T=\frac{1}{2}\sum m_\nu v_\nu^2=\frac{1}{2}\sum m_\nu v_C^2=\frac{1}{2}Mv_C^2. \tag{13}$$

Вычислим теперь кинетическую энергию абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Ox с угловой скоростью ω. Имеем

$$T=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu^2,$$

но $v_\nu=h_\nu\omega$, где h_ν есть расстояние точки с массой m_ν до оси вращения Ox, поэтому

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\sum_\nu m_\nu h_\nu^2=\frac{1}{2}J_x\omega^2. \tag{14}$$

Величина $J_x=\sum\limits_\nu m_\nu h_\nu^2$ есть момент инерции тела относительно оси вращения. Заметим, что формула (14) будет справедлива и в том случае, когда ось x является мгновенной осью вращения, так как равенство $v_\nu=h_\nu\omega$ имеет место и для этого случая. При этом J_x будет моментом инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

В общем случае движения кинетическая энергия твердого тела вычисляется по теореме Кёнига. Так как по теореме Шаля движение твердого тела относительно подвижных осей $Cx'y'z'$ слагается из мгновенных вращений вокруг осей, проходящих через точку C, то $\sum m_\nu v_\nu'^2=J_{Cx}\omega^2$, и формула (11) дает

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_{Cx}\omega^2, \tag{15}$$

где J_{Cx} — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через его центр масс, ω — мгновенная угловая скорость тела. Формула (15) выражает теорему Кёнига для абсолютно твердого тела.

8. Осевой момент инерции. При вычислении динамических характеристик вращающегося твердого тела в их выражения вошла величина

$$J_x=\sum_\nu m_\nu h_\nu^2, \tag{16}$$

где h_ν есть расстояние точки с массой m_ν от оси x. Эта величина J_x, как было сказано, называется моментом инерции тела относительно оси x или осевым моментом инерции.

Выясним механический смысл величины J_x. Если твердое тело движется поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}$, то его количество движения равно $M\boldsymbol{v}$, а кинетическая энергия $T=\frac{1}{2}Mv^2$, где M есть масса всего тела. При вращении тела вокруг оси x с угловой скоростью ω кинетический момент тела относительно оси вращения будет $G_x=J_x\omega$, а кинетическая энергия $T=\frac{1}{2}J_x\omega^2$. Сравнивая эти выражения с предыдущими, можно сказать, что при вращательном движении момент инерции тела относительно оси вращения играет такую же роль, как масса тела при поступательном движении.

Из равенства (16) видно, что размерность момента инерции J_x есть [масса · (длина)^2]

Моменту инерции тела относительно оси можно еще дать другое выражение. Положим

$$J_x=\sum_\nu m_\nu h_\nu^2=Mi_x^2, \tag{17}$$

где M есть масса всего тела; тогда i_x есть некоторая длина, которая называется *радиусом инерции* тела относительно оси x.

Радиус инерции, как видно из предыдущего равенства, равен расстоянию от оси x той точки, в которой нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы получить тот же момент инерции. Очевидно,

$$i_x=\sqrt{\frac{J_x}{M}}. \tag{17'}$$

Из формулы (16) видно, что момент инерции тела относительно данной оси зависит только от закона распределения масс в объеме, занимаемом телом.

Вычислим моменты инерции некоторых однородных твердых тел (тело называется однородным, если отношение массы любой части тела к ее объему есть для всех частей тела величина постоянная; это отношение называется плотностью тела).

1) *Тонкое однородное кольцо.* Пусть масса кольца M, радиус R. Проведем через центр C кольца ось Cx, перпендикулярную к пло-

скости кольца (рис. 10). Тогда для любой точки кольца $h_\nu = R$ и $\sum m_\nu h_\nu^2 = \sum m_\nu R^2 = MR^2$. Следовательно, для кольца

$$J_x = MR^2. \tag{18}$$

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массы M и радиуса R относительно ее оси.

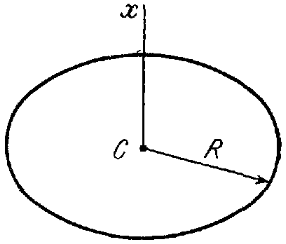
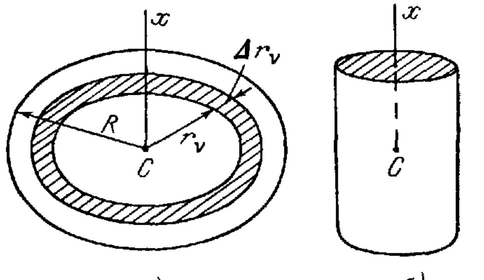


Рис 10.

2) *Круглая однородная пластина (или цилиндр).* Пусть масса пластины M, радиус R. Разобьем пластину на тонкие концентрические кольца (рис. 11, *а*) Площадь какого-нибудь из этих колец с радиусом r_ν и шириною Δr_ν будет с точностью до $(\Delta r_\nu)^2$ равна $2\pi r_\nu \Delta r_\nu$, а масса равна $\frac{M}{\pi R^2} 2\pi r_\nu \Delta r_\nu$. Тогда момент инерции этого кольца относительно оси Cx, перпендикулярной к плоскости пластины, будет, согласно формуле (18), равен $\left(\frac{M}{R^2} 2r_\nu \Delta r_\nu\right) r_\nu^2$. Складывая осевые моменты инерции всех колец и переходя к пределу при $\Delta r_\nu \to 0$, мы получим выражение для момента инерции всей пластины в виде определенного интеграла

$$J_x = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3\, dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4}.$$



а) б)

Рис 11

Окончательно

$$J_x = \frac{1}{2} MR^2. \tag{19}$$

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции однородного круглого цилиндра массы M и радиуса R относительно его оси (рис. 11, *б*)

3) *Однородный тонкий стержень.* Пусть масса стержня M, длина l. Найдем момент инерции стержня относительно оси Ax, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец A (рис. 12). Масса любого элемента стержня длиною Δh_ν будет равна $m_\nu = \frac{M}{l} \Delta h_\nu$. Подставляя это значение m_ν в формулу (16) и переходя к пределу при $\Delta h_\nu \to 0$, получим

$$J_x = \frac{M}{l} \int_0^l h^2\, dh = \frac{M}{l} \frac{l^3}{3},$$

или окончательно

$$J_x = \frac{1}{3} Ml^2. \tag{20}$$

Если таким же образом вычислить момент инерции относительно оси Cx', проходящей через центр масс C тела и параллельной оси Ox, то получим

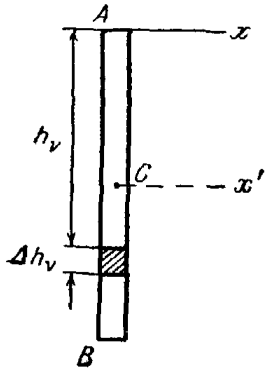


Рис. 12.

$$J_{Cx'} = \frac{1}{12} Ml^2. \tag{20'}$$

Заметим, что вообще между моментами инерции тела относительно параллельных осей Ox и Cx', из которых Cx' проходит через центр масс тела, имеет место соотношение

$$J_{Ox} = J_{Cx'} + Md^2, \tag{21}$$

где d — расстояние между осями (теорема Гюйгенса).

Равенства (20) и (20′) могут быть получены одно из другого с помощью формулы (21).

Подробнее вопрос о моментах инерции тела и их свойствах будет рассмотрен в § 11; там же будет доказана и теорема Гюйгенса.

§ 3. Общие теоремы динамики системы

1. Общие теоремы динамики системы, являясь прямым следствием уравнений движения, дают связь между динамическими величинами, характеризующими движение системы, и действующими на систему *силами; в некоторых случаях из общих теорем можно получить* первые интегралы движения. Эти интегралы часто дают достаточно данных для определения движения системы и поэтому имеют большое значение при решении практических задач; кроме того, они допускают наглядную физическую интерпретацию и могут быть выражены в виде определенных физических законов, вследствие чего часто называются законами динамики.

Для полного решения механической задачи необходимо проинтегрировать систему уравнений движения и найти координаты всех *точек системы как функции времени*, что в большинстве случаев связано со значительными трудностями, особенно если число уравнений велико; но практически иногда требуется знать *лишь* некоторые величины, характеризующие движение системы в целом, вследствие чего можно не интегрировать всю систему уравнений, а найти только некоторые ее интегралы, что часто может быть легко достигнуто применением общих теорем динамики.

2. Дифференциальные уравнения движения системы. Пусть мы имеем систему, состоящую из n материальных точек. Рассмотрим некоторую точку системы M_ν с массой m_ν (рис. 13), где ν есть номер точки. В общем случае на эту точку действуют внешние и внутренние силы, которые в свою очередь могут быть как активными, так и пассивными (реакциями связей). Обозначим равнодействующую всех внешних сил, как активных, так и пассивных, действующих на рассматриваемую точку, через $\boldsymbol{F}_\nu^e$, а равнодействующую всех внутренних сил — через $\boldsymbol{F}_\nu^i$.

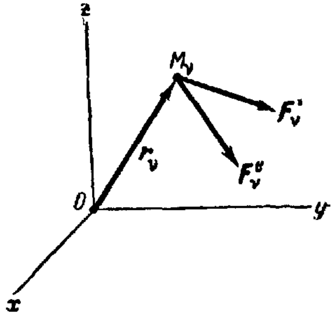


Рис. 13.

На основании принципа связей мы можем считать эту точку свободной, так как к ней приложены, кроме действующих на нее активных сил, и реакции связей; поэтому уравнение движения этой, а по аналогии и уравнения движения всех других точек системы будут

$$m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} = \boldsymbol{F}_\nu^e + \boldsymbol{F}_\nu^i \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{1}$$

Уравнения (1) представляют собою n дифференциальных уравнений движения системы в векторной форме. В проекциях на оси координат эти уравнения дадут $3n$ скалярных дифференциальных уравнений движения.

Общие теоремы динамики, как указывалось, являются прямыми следствиями этих дифференциальных уравнений.

3. Теорема об изменении количества движения системы и теорема о движении центра масс. Сложим почленно все уравнения (1). Тогда получим

$$\sum_\nu m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} = \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^e + \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^i. \tag{2}$$

По третьему закону Ньютона внутренние силы попарно равны и противоположны, т. е. если частица A действует на частицу B с силой f, то частица B действует на частицу A с силой $-f$; поэтому сумма всех внутренних сил системы равна нулю, т. е.

$$\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^i = 0,$$

и равенство (2) примет вид

$$\sum_\nu m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} = \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^e. \tag{3}$$

Принимая во внимание, что $\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} = \boldsymbol{v}_\nu$, имеем

$$\sum_\nu m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} = \frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt},$$

где вектор $\boldsymbol{Q} = \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$ есть количество движения системы. Заменяя левую часть уравнения (3) ее значением, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^e \tag{4}$$

или в проекциях на оси

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_\nu F_{\nu x}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_\nu F_{\nu y}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_\nu F_{\nu z}^e. \tag{4'}$$

Равенство (4) выражает первую основную теорему динамики системы, именно теорему об изменении количества движения: *производная по времени от количества движения системы равна сумме всех действующих на систему внешних сил.*

Эту теорему можно также представить в интегральной форме. Умножая обе части векторного равенства (4) на dt и беря от них определенные интегралы в пределах от t_0 до t, получим

$$\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0 = \sum_\nu \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}_\nu^e\,dt \quad \text{или} \quad \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0 = \sum_\nu \boldsymbol{S}_\nu^e, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{Q}_0$ — количество движения системы в момент t_0, а $\boldsymbol{Q}$ — количество движения в момент t; $\boldsymbol{S}_\nu^e$ есть импульс силы $\boldsymbol{F}_\nu^e$ за промежуток времени $t - t_0$. Таким образом, *изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равняется сумме импульсов всех действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.* В проекциях на оси координат будем иметь

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_\nu S_{\nu x}^e, \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_\nu S_{\nu y}^e, \quad Q_z - Q_{z0} = \sum_\nu S_{\nu z}^e. \tag{5'}$$

Из векторного соотношения (4) легко получить теорему о движении центра масс системы. В самом деле, принимая во внимание, что

$$\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C,$$

где M есть масса всей системы, а $\boldsymbol{v}_C$ — скорость ее центра масс, найдем из уравнения (4)

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}_\nu^e,$$

или

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{F}_\nu^e, \tag{6}$$

где $\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}$ есть ускорение центра масс. Уравнение (6) показывает, что *центр масс системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, на которую действуют все приложенные к системе внешние силы* (теорема о движении центра масс).

В некоторых случаях эти теоремы могут дать интегралы движения. Пусть на систему действуют только одни внутренние силы; тогда

$$\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{F}_\nu^e=0,$$

и, следовательно, из уравнения (4) имеем $\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}=0$, откуда

$$\boldsymbol{Q}=\text{const}, \tag{7}$$

или, так как

$$\boldsymbol{Q}=M\boldsymbol{v}_C,$$

то

$$\boldsymbol{v}_C=\text{const}. \tag{7'}$$

В этом случае центр масс системы движется по инерции, и количество движения системы есть величина постоянная. Проектируя обе части равенств (7) и (7′) на оси координат, получим три первых интеграла

$$Q_x=c_1,\quad Q_y=c_2,\quad Q_z=c_3, \tag{8}$$

или

$$\dot{x}_C=c_1',\quad \dot{y}_C=c_2',\quad \dot{z}_C=c_3'. \tag{8'}$$

Если внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма проекций этих сил на какую-либо ось, например на ось x, равна нулю, т. е. если $\sum_\nu F_{\nu x}^e=0$, то из уравнений (4′) имеем

$$\frac{dQ_x}{dt}=0,$$

откуда

$$Q_x=M\dot{x}_C=\text{const}. \tag{8''}$$

Следовательно, при указанном условии проекция количества движения системы на ось x есть величина постоянная, или, что то же, проекция центра масс системы на эту ось имеет постоянную скорость; теорема дает в этом случае один первый интеграл.

Примеры. 1. Если пренебречь притяжением звезд, то на тела, составляющие солнечную систему, не будут действовать внешние силы. Поэтому центр масс солнечной системы должен двигаться прямолинейно и равномерно относительно системы неподвижных звезд.

2. При взрыве артиллерийского снаряда возникают внутренние ударные силы, которые не могут изменить движения центра масс. Поэтому центр масс всех осколков снаряда и прочих остатков после взрыва продолжает двигаться по той же самой траектории, по которой двигался центр масс снаряда до взрыва. Это вполне верно для движения в пустоте и лишь приближенно справедливо для движения в сопротивляющейся среде, ибо при взрыве на осколки действуют внешние силы сопротивления воздуха, отличные от сил, которые действовали на снаряд.

3. На человека, стоящего на гладкой горизонтальной плоскости, действуют сила тяжести и реакция плоскости, проекции которых на эту плоскость равны нулю. Поэтому идти по идеально гладкой плоскости человек не мог бы; это становится возможным лишь вследствие наличия трения. Если человек, стоя на плоскости, выдвинет вперед ногу, то другая нога должна отодвинуться назад для сохранения неподвижности проекции центра масс на горизонтальную плоскость. Это и имеет место, если плоскость идеальная. Если же плоскость шероховатая, то при скольжении развивается сила трения, направленная вперед и являющаяся внешней силой, делающей возможным движение. Под действием одних внутренних мускульных сил человек не может переместить свой центр тяжести.

4. Вагонетка массы M стоит на рельсах, а на ней находится человек массы m, который в начальный момент неподвижен, а затем идет по вагонетке со скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно вагонетки (рис. 14). Требуется определить движение вагонетки, пренебрегая трением о рельсы.

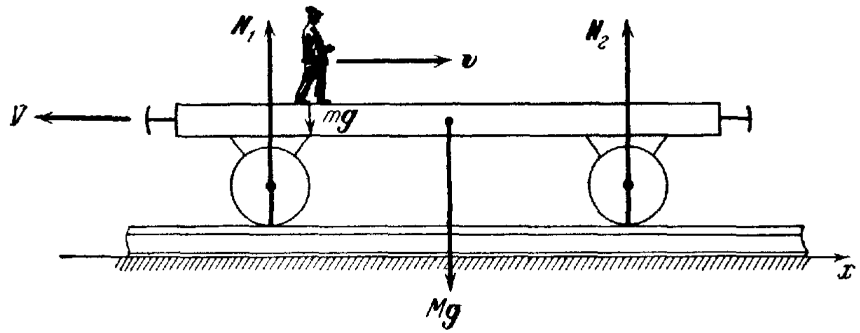


Рис. 14.

При отсутствии трения единственными внешними силами, действующими на систему человек — вагонетка, являются силы тяжести и нормальные реакции рельс; поэтому сумма проекций внешних сил на горизонтальную ось x равна нулю; следовательно, сумма проекций количества движения системы на ось x должна оставаться постоянной. Когда человек стоял на неподвижной вагонетке, то количество движения системы было равно нулю. Если человек пойдет по вагонетке со скоростью $\boldsymbol{v}$ вправо, а вагонетка останется на месте, то количество движения системы будет равно $m\boldsymbol{v}$, что невозможно, так как количество движения системы должно равняться нулю согласно начальным условиям. Следовательно, вагонетка тоже должна двигаться.

Обозначим через V скорость вагонетки; тогда теорема об изменении количества движения дает в проекции на ось x уравнение

$$m(v_x + V_x) + MV_x = 0,$$

ибо скорость человека относительно рельс равна $v + V$. Из последнего уравнения определится скорость движения вагонетки

$$V_x = -\frac{m}{M+m} v_x.$$

Знак минус показывает, что вагонетка будет двигаться в сторону, обратную движению человека.

5. Масса вала мотора равна m_1, а масса всех остальных его частей — m_2; центр масс вала, вращающегося равномерно с угловой скоростью ω, смещен

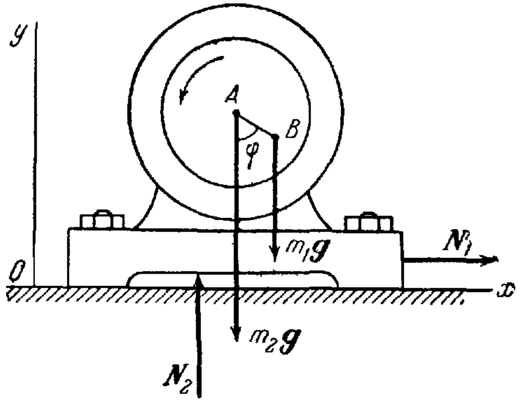


Рис. 15.

от оси на расстояние $AB = a$. Найти реакции опоры и болтов, закрепляющих мотор, считая, что они приводятся к равнодействующей с составляющими N_1 и N_2 (рис. 15).

Внешними силами, действующими на мотор, являются силы тяжести $m_1 g$ и $m_2 g$ и реакции N_1 и N_2. Уравнение (6) в проекциях на оси x и y дает

$$M\ddot{x}_C = N_1, \quad M\ddot{y}_C = N_2 - (m_1 + m_2) g,$$

где $M = m_1 + m_2$ — масса всей системы. В данном случае закон движения центра масс C всей системы известен; так как $\varphi = \omega t$, то

$$Mx_C = m_2 x_A + m_1(x_A + a\sin\omega t), \quad My_C = m_2 y_A + m_1(y_A - a\cos\omega t).$$

Отсюда, учитывая, что $x_A = \text{const}$, $y_A = \text{const}$, получим

$$M\ddot{x}_C = -m_1 a\omega^2 \sin\omega t, \quad M\ddot{y}_C = m_1 a\omega^2 \cos\omega t.$$

Следовательно,

$$N_1 = -m_1 a\omega^2 \sin\omega t, \quad N_2 = (m_1 + m_2) g + m_1 a\omega^2 \cos\omega t.$$

Наибольшие значения реакции имеют соответственно при $\sin\omega t$ или $\cos\omega t$, равных единице.

Если угловая скорость вращения такова, что $m_1 a\omega^2 > (m_1 + m_2) g$, то при верхних положениях центра масс вала мотор будет отрываться

от опорной плоскости (прижиматься к головкам болтов, а при незатянутых болтах — подпрыгивать).

6. Давление струи. Пусть струя жидкости вытекает из трубы с площадью поперечного сечения σ, имея скорость v, направленную под углом α к вертикали (рис. 16). Найдем силу нормального давления струи на вертикальную стенку, пренебрегая сжатием струи и считая движение установившимся.

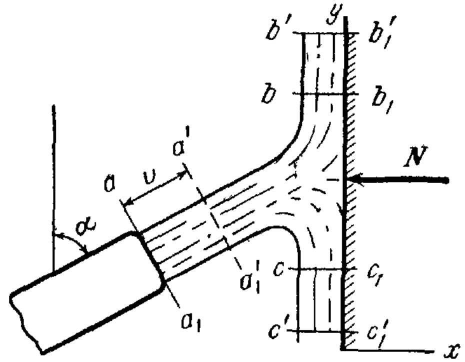


Рис. 16.

Применим первое из уравнений (5′) к объему жидкости, ограниченному сечениями aa_1, bb_1, cc_1. Внешней силой, действующей на этот объем и дающей проекцию на ось x, будет реакция N стенки (давлением в сечении aa_1 струи пренебрегаем). Тогда, считая $N = \text{const}$ и беря $t - t_0 = 1$ *сек*, получим в проекции на ось x

$$(Q_x - Q_{0x})_{сек} = -N \cdot 1.$$

За секунду граница aa_1 сместится на величину v, перейдя в положение $a'a'_1$. Масса жидкости в объеме $aa_1a'a'_1$ равна $\rho\sigma v$, где ρ — плотность жидкости; следовательно, количество движения в выделенном объеме убывает за счет этого перемещения границы на величину $\rho\sigma v^2$. Приращения же количеств движения в объемах $bb_1b'b'_1$ и $cc_1c'c'_1$ проекций на ось x не дают. Поэтому $(Q_x - Q_{0x})_{сек} = -\rho\sigma v^2 \sin\alpha$ и окончательно

$$N = \rho\sigma v^2 \sin\alpha.$$

4. Теорема об изменении кинетического момента системы (или теорема площадей). Пусть мы имеем систему n материальных точек, на которые действуют как внешние, так и внутренние силы. Возьмем дифференциальные уравнения движения этой системы

$$m_\nu \frac{d^2 \boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} = \boldsymbol{F}_\nu^e + \boldsymbol{F}_\nu^i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

и умножим обе части каждого из уравнений векторно слева на $\boldsymbol{r}_\nu$, т. е. на соответствующий радиус-вектор; сложив полученные таким образом равенства, будем иметь

$$\sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right) = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e) + \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^i). \tag{9}$$

Так как внутренние силы попарно равны и противоположны, то сумма моментов этих сил относительно любого центра равна нулю. В самом деле, возьмем две силы $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$, причем $\boldsymbol{F}_A = -\boldsymbol{F}_B$ (рис. 17), тогда сумма моментов этих сил относительно какого-либо центра O будет

$$\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{F}_B = (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) \times \boldsymbol{F}_B = \overline{AB} \times \boldsymbol{F}_B.$$

Но $\overline{AB} \times \boldsymbol{F}_B = 0$, так как векторы $\overline{AB}$ и $\boldsymbol{F}_B$ коллинеарны; следовательно, сумма моментов двух равных взаимно противоположных сил относительно любого центра равна нулю; отсюда вытекает, что

$$\sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^i) = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\boldsymbol{r}_\nu \times \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_\nu \times \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}\right),$$

в чем нетрудно убедиться, выполнив дифференцирование, можно представить уравнение (9) в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}\right) = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e). \tag{10}$$

Выражение, стоящее под знаком производной, есть кинетический момент системы относительно центра O; обозначая его через $\boldsymbol{G}_O$, получим уравнение (10) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{G}_O}{dt} = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e). \tag{10'}$$

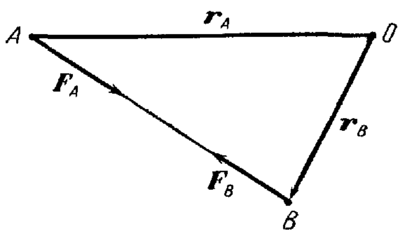


Рис. 17.

Уравнение (10′) выражает теорему об изменении кинетического момента системы, которая формулируется так: *производная по времени от кинетического момента системы относительно какого-либо неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра.*

Если воспользоваться понятием секторной скорости (см. ч. I, § 6, п. 6), то уравнение (10) можно еще представить в виде

$$\frac{d}{dt}\, 2\sum_\nu m_\nu \frac{d\sigma^\nu}{dt} = \sum_\nu \mathrm{mom}_O\, \boldsymbol{F}_\nu^e, \tag{10''}$$

где

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right) = \frac{dv_\sigma}{dt}$$

есть секторное ускорение точки.

Уравнение (10″) представляет собой так называемую теорему площадей: *удвоенная сумма произведений масс материальных точек на их секторные ускорения относительно какого-либо центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.*

Предположим, что сумма моментов внешних сил относительно некоторого центра O равна нулю (что, например, имеет место, если внешние силы на данную систему не действуют); тогда

$$\sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e) = 0,$$

следовательно,

$$\frac{d\boldsymbol{G}_O}{dt} = 0,$$

откуда получаем векторный интеграл

$$\boldsymbol{G}_O = \text{const},$$

т. е. при этих условиях кинетический момент системы $\boldsymbol{G}_O$ есть величина постоянная. Плоскость, перпендикулярная к направлению $\boldsymbol{G}_O$, будет тоже иметь постоянное направление в пространстве и называется неизменяемой плоскостью Лапласа (иногда ее также называют плоскостью максимума площадей).

Проектируя обе части равенства (10) на оси координат, получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} &= \sum_\nu \mathrm{mom}_x \boldsymbol{F}_\nu^e, \\ \frac{dG_y}{dt} &= \sum_\nu \mathrm{mom}_y \boldsymbol{F}_\nu^e, \\ \frac{dG_z}{dt} &= \sum_\nu \mathrm{mom}_z \boldsymbol{F}_\nu^e, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu (y_\nu \dot z_\nu - z_\nu \dot y_\nu) &= \sum_\nu (y_\nu F_{\nu z}^e - z_\nu F_{\nu y}^e), \\ \frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu (z_\nu \dot x_\nu - x_\nu \dot z_\nu) &= \sum_\nu (z_\nu F_{\nu x}^e - x_\nu F_{\nu z}^e), \\ \frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu (x_\nu \dot y_\nu - y_\nu \dot x_\nu) &= \sum_\nu (x_\nu F_{\nu y}^e - y_\nu F_{\nu x}^e). \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

Уравнения (11) можно еще представить в другом виде, спроектировав обе части равенства (10″) на оси координат; получим

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_\nu m_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{d\sigma_{yz}^\nu}{dt}\right) &= \sum_\nu \mathrm{mom}_x \boldsymbol{F}_\nu^e, \\ 2\sum_\nu m_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{d\sigma_{zx}^\nu}{dt}\right) &= \sum_\nu \mathrm{mom}_y \boldsymbol{F}_\nu^e, \\ 2\sum_\nu m_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{d\sigma_{xy}^\nu}{dt}\right) &= \sum_\nu \mathrm{mom}_z \boldsymbol{F}_\nu^e. \end{aligned}\right\} \qquad (11'')$$

Если сумма моментов всех внешних сил относительно одной из осей, например x, равна нулю, т. е. если $\sum\limits_\nu \mathrm{mom}_x \boldsymbol{F}_\nu^e = 0$, то из уравнений (11) получаем скалярный интеграл

$$G_x \equiv \sum_\nu \mathrm{mom}_x (m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \mathrm{const};$$

таким образом, если сумма моментов всех действующих внешних сил относительно какой-либо оси равна нулю, то сумма моментов количеств движения системы относительно той же оси, или, что то же, проекция кинетического момента на эту ось постоянна.

Из уравнений (11″) тот же интеграл получается в виде

$$G_x = 2\sum_\nu m_\nu \frac{d\sigma_{yz}^\nu}{dt} = \mathrm{const},$$

следовательно, если сумма моментов внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то сумма произведений масс всех точек системы на секторные скорости их проекций на плоскость, перпендикулярную к той же оси, есть величина постоянная.

Рассмотрим теперь применение теоремы о кинетическом моменте к движению системы относительно центра масс, т. е. относительно осей $Cx'y'z'$, имеющих начало в центре масс и перемещающихся вместе с центром масс поступательно по отношению к основной системе отсчета $Oxyz$ (см. рис. 6). Пусть положение центра масс C определяется координатой $\boldsymbol{r}_C$, и пусть радиус-вектор точки с массой m_ν относительно осей $Cx'y'z'$ будет $\boldsymbol{r}'_\nu$. Тогда

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_\nu. \qquad (12)$$

Теорема об изменении кинетического момента при движении по отношению к основной системе отсчета имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{G}_O}{dt} = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e).$$

Заменим справа вектор $\boldsymbol{r}_\nu$ его значением (12), а величину $\boldsymbol{G}_O$ ее выражением (6), полученным в § 2. Тогда будем иметь

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_C \times M\boldsymbol{v}_C) + \frac{d}{dt}\sum_\nu (\boldsymbol{r}'_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}'_\nu) = \boldsymbol{r}_C \times \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^e + \sum_\nu (\boldsymbol{r}'_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e). \qquad (13)$$

Известно, что центр масс системы движется как точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все действующие на систему внешние силы; поэтому по отношению к движению центра масс имеют место все теоремы динамики точки и, в частности, теорема о кинетическом моменте; следовательно, имеем

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_C \times M\boldsymbol{v}_C) = \boldsymbol{r}_C \times \sum_{\nu=1}^n \boldsymbol{F}_\nu^e.$$

Сокращая в уравнении (13) равные члены, получим

$$\frac{d}{dt}\sum_\nu (\boldsymbol{r}'_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}'_\nu) = \sum_\nu (\boldsymbol{r}'_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e), \qquad (14)$$

или, обозначая $\sum\limits_\nu (\boldsymbol{r}'_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}'_\nu) = \boldsymbol{G}'_C$,

$$\frac{d\boldsymbol{G}'_C}{dt} = \sum_\nu (\boldsymbol{r}'_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e), \qquad (14')$$

т. е. при движении системы относительно центра масс производная по времени от суммы моментов количеств движения всех точек системы относительно центра масс равна сумме моментов всех действующих внешних сил относительно того же центра[1]).

Таким образом, для движения относительно центра масс теорема об изменении кинетического момента выражается совершенно так же, как если бы центр масс был неподвижной точкой

В предыдущих рассуждениях мы считали центр O, относительно которого брали кинетический момент системы, неподвижным и получили выражение теоремы об изменении кинетического момента в виде

$$\frac{d\boldsymbol{G}_O}{dt} = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^e), \qquad (15)$$

причем как сумма моментов количеств движения всех точек системы, так и сумма моментов всех внешних сил взяты относительно неподвижного центра O. Посмотрим, как изменится это выражение,

[1]) Движением относительно центра масс мы будем в дальнейшем называть движение относительно системы отсчета, имеющей начало в центре масс и движущейся вместе с центром масс поступательно по отношению к основной системе отсчета.

если за центр моментов взять точку O', которая движется относительно основной системы отсчета. Выше [§ 2, уравнение (8)] мы нашли, что

$$\boldsymbol{G}_{O'} = \boldsymbol{G}_O - \overline{OO'} \times \boldsymbol{Q},$$

или, обозначая для удобства письма $\boldsymbol{G}_{O'} = \boldsymbol{G}'$; $\boldsymbol{G}_O = \boldsymbol{G}$,

$$\boldsymbol{G}' = \boldsymbol{G} - \overline{OO'} \times \boldsymbol{Q}. \tag{16}$$

Дифференцируя равенство (16) по времени и принимая во внимание, что $\frac{d\overline{OO'}}{dt} = \boldsymbol{v}'$ есть скорость центра O' относительно основной системы отсчета и что на основании уравнения (4)

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{e},$$

получим

$$\frac{d\boldsymbol{G}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{G}}{dt} - \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} - \overline{OO'} \times \sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{e}. \tag{17}$$

Определяя отсюда величину $\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}$ и подставляя ее в уравнение (15), найдем

$$\frac{d\boldsymbol{G}'}{dt} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} = \sum_{\nu} [(\boldsymbol{r}_{\nu} - \overline{OO'}) \times \boldsymbol{F}_{\nu}^{e}],$$

или, принимая во внимание, что $\boldsymbol{r}_{\nu} - \overline{OO'} = \boldsymbol{r}'_{\nu}$ (см. рис. 7),

$$\frac{d\boldsymbol{G}'}{dt} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} = \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}'_{\nu} \times \boldsymbol{F}_{\nu}^{e}). \tag{18}$$

Уравнение (18) выражает теорему об изменении кинетического момента системы по отношению к центру O', движущемуся со скоростью $\boldsymbol{v}'$ относительно основной системы отсчета. При этом следует иметь в виду, что $\boldsymbol{G}' = \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}'_{\nu} \times m_{\nu}\boldsymbol{v}_{\nu})$, т. е. при вычислении $\boldsymbol{G}'$ скорости $\boldsymbol{v}_{\nu}$ точек системы берутся относительно *основной* системы отсчета, а моменты векторов $m_{\nu}\boldsymbol{v}_{\nu}$ берутся относительно подвижного центра O'; в правой части уравнения стоит сумма моментов внешних сил также относительно подвижного центра O'.

Если $\boldsymbol{v}' = 0$, то уравнение (18) переходит, очевидно, в уравнение (10) Если же O' совпадает с центром масс C системы, то $\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{v}_C \times M\boldsymbol{v}_C = 0$ и уравнение (18) принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{G}_C}{dt} = \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}'_{\nu} \times \boldsymbol{F}_{\nu}^{e}). \tag{19}$$

Это уравнение совпадает с (14'), если учесть, как было показано в § 2, п. 3, что $\boldsymbol{G}'_C = \boldsymbol{G}_C$.

Примеры. 1. Если не принимать во внимание притяжения неподвижных звезд, то главный момент внешних сил, действующих на солнечную систему, равен нулю, поэтому кинетический момент солнечной системы $\boldsymbol{G}_C$ относительно центра масс должен оставаться неизменным, т. е. $\boldsymbol{G}_C = \text{const}$. Плоскость, перпендикулярная к направлению $\boldsymbol{G}_C$, также будет сохранять свою ориентировку относительно неподвижных звезд и называется, как уже было сказано, неизменяемой плоскостью Лапласа, который предложил относить движение тел солнечной системы к этой плоскости.

2. Если человек стоит на платформе Жуковского (круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может вращаться с малым трением вокруг вертикальной оси), то на эту систему (человек — платформа), если пренебречь трением, действуют только сила тяжести и нормальные реакции опор. Сумма моментов этих внешних сил относительно вертикальной оси x равна нулю; следовательно, если системе сообщить толчком вращение вокруг оси x, то во все последующее время будет

$$G_x = J_x\omega = \text{const}, \tag{20}$$

где J_x — момент инерции системы относительно оси x, ω — угловая скорость вращения. Величина J_x здесь может изменяться, например, за счет движения рук человека. Если руки вначале были разведены в стороны, а затем будут опущены, то J_x уменьшится и угловая скорость ω увеличится и наоборот.

Аналогичный результат получается при прыжке акробата в воздухе, когда он делает сальто. В начале прыжка акробат сообщает своему телу угловую скорость вокруг горизонтальной оси x, проходящей через центр масс тела. Так как единственная действующая на него внешняя сила — сила тяжести — проходит через центр масс (сопротивлением воздуха пренебрегаем), то ее момент относительно оси x равен нулю, и здесь имеет место равенство (20). Группируя корпус, акробат уменьшает момент инерции J_x, в результате чего угловая скорость увеличивается (для достижения полного оборота).

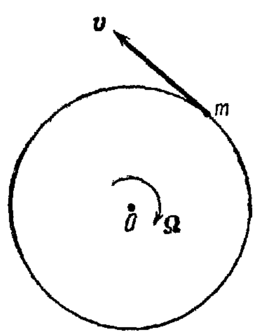


Рис. 18.

3. На круглой горизонтальной платформе радиуса R и массы M (рис. 18), могущей вращаться без трения вокруг вертикальной оси Oz, стоит человек массы m. В некоторый момент он начинает идти вдоль окружности платформы со скоростью $\boldsymbol{v}$ (относительно платформы). Найти угловую скорость вращения платформы.

Так как силы тяжести параллельны оси вращения, а реакции подшипников эту ось пересекают, то сумма моментов внешних сил относительно оси z равна нулю и, следовательно, $G_z = \text{const}$. Но в начальный момент ни человек, ни платформа не двигались; поэтому $G_z = 0$ во все время движения. Если бы при движении человека платформа не вращалась, то кинетический момент системы не был бы равен нулю; следовательно, для того чтобы G_z было равно нулю, необходимо, чтобы сама платформа вращалась с некоторой угловой скоростью Ω.

Если момент инерции платформы относительно оси z обозначим через J_z, то кинетический момент платформы относительно этой оси будет равен $J_z\Omega$. Скорость человека относительно земли равна $|\boldsymbol{v}_{\text{отн}} + \boldsymbol{v}_{\text{пер}}| = v + \Omega R$. Тогда момент количества движения человека относительно оси z будет равен

$m(v+\Omega R)R$. Вставляя все найденные величины в условие $G_z=0$, получим

$$J_z\Omega+m(v+\Omega R)R=0,\quad \text{откуда}\quad \Omega=-\frac{mvR}{J_z+mR^2}.$$

Если платформа однородна, то по формуле (19) из § 2 $J_z=\frac{MR^2}{2}$, и

$$\Omega=-\frac{mvR}{\frac{MR^2}{2}+mR^2}=-\frac{mv}{R\left(\frac{M}{2}+m\right)}.$$

Знак минус указывает на то, что платформа будет вращаться в сторону, обратную движению человека.

4. Через сплошной неподвижный блок весом p перекинута гибкая нерастяжимая нить с грузами весом P и Q на концах (рис. 19). Пренебрегая весом нити и трением в оси, найти ускорения грузов при движении системы.

Применяя теорему об изменении кинетического момента относительно оси вращения блока Ox, составим первое из уравнений (11):

$$\frac{dG_x}{dt}=\sum \operatorname{mom}_x(F_\nu^e)\ \ldots \tag{a}$$

Величина G_x слагается из кинетических моментов блока и грузов и будет равна

$$G_x=J_x\omega+\frac{P}{g}vR+\frac{Q}{g}vR,$$

где ω — угловая скорость блока, R — его радиус, v — скорость грузов. Учитывая, что $J_x=0{,}5\frac{p}{g}R^2$ и $\omega=\frac{v}{R}$, получим окончательно

$$G_x=\left(\frac{p}{2}+P+Q\right)\frac{R}{g}v.$$

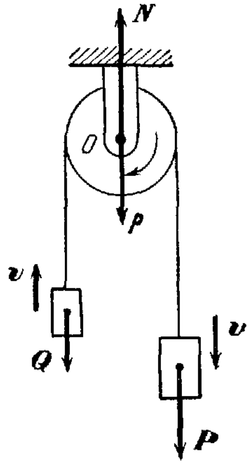


Рис. 19.

Далее, $\sum \operatorname{mom}_x(F_\nu^e)=PR-QR$ (полагаем для определенности, что $P>Q$, и момент силы считаем положительным в том же направлении, что и момент количества движения; моменты силы p и реакции N относительно оси Ox равны нулю). Подставляя все найденные величины в равенство (a), получим

$$(p+2P+2Q)\frac{R}{2g}\frac{dv}{dt}=(P-Q)R,$$

откуда

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{2(P-Q)}{p+2P+2Q}g.$$

5. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Пусть мы имеем систему n материальных точек. К каждой точке системы, кроме действующих на нее активных сил, приложим реакции связей и разделим все приложенные к точке силы на две группы:

внешние силы, равнодействующую которых обозначим через F_ν^e, и внутренние силы, равнодействующая которых пусть будет F_ν^i; тогда каждую точку системы можно рассматривать как свободную, находящуюся под действием двух сил F_ν^e и F_ν^i. По отношению к каждой точке системы имеет место теорема об изменении кинетической энергии, являющаяся следствием уравнений (1):

$$d\left(\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right)=F_\nu^e\cdot dr_\nu+F_\nu^i\cdot dr_\nu\qquad (\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{21}$$

Сложив эти n уравнений почленно, получим

$$d\sum_\nu\left(\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2\right)=\sum_\nu F_\nu^e\cdot dr_\nu+\sum_\nu F_\nu^i\cdot dr_\nu.$$

Величина

$$T=\sum_\nu\left(\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2\right)$$

есть кинетическая энергия системы. Таким образом, окончательно будем иметь

$$dT=\sum_\nu F_\nu^e\cdot dr_\nu+\sum_\nu F_\nu^i\cdot dr_\nu. \tag{22}$$

Равенство (22) выражает следующую теорему об изменении кинетической энергии (в дифференциальной форме): *дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил.*

Если каждое из уравнений (21) представить в конечной форме

$$\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}-\left(\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right)_0=A_\nu^e+A_\nu^i\qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где A_ν^e и A_ν^i — работы сил F_ν^e и F_ν^i на перемещении точки системы из начального положения в данное, и затем просуммировать эти равенства, то мы получим

$$T-T_0=\sum_\nu A_\nu^e+\sum_\nu A_\nu^i\ \ldots \tag{23}$$

Равенство (23) выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечной (интегральной) форме: *изменение кинетической энергии системы при перемещении ее из какой-то начальной конфигурации в данную равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.*

Рассмотрим, что представляет собою сумма работ внутренних сил, полагая, что эти силы, как силы взаимодействия между точками системы, являются функциями только расстояния между этими точками и направлены по прямой, их соединяющей. Пусть материальная точка A действует на точку B с силой $\boldsymbol{F}_A$, а точка B на точку A с силой $\boldsymbol{F}_B$ (см. рис. 17); тогда по третьему закону Ньютона

$$\boldsymbol{F}_A = -\boldsymbol{F}_B.$$

Положим, что

$$|\boldsymbol{F}_A| = |\boldsymbol{F}_B| = f(\rho_{AB}),$$

где $\rho_{AB} = AB$. Если точки A и B совершат некоторые элементарные перемещения $d\boldsymbol{r}_A$ и $d\boldsymbol{r}_B$, то работа этих сил будет

$$\boldsymbol{F}_A \cdot d\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{F}_B \cdot d\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{F}_B \cdot (d\boldsymbol{r}_B - d\boldsymbol{r}_A) = \boldsymbol{F}_B \cdot d(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) = \boldsymbol{F}_B \cdot d\overline{AB}.$$

Обозначим орт вектора $\overline{AB}$ через $\boldsymbol{a}^0$. Тогда $\overline{AB} = \rho_{AB}\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{F}_B = \pm f(\rho_{AB})\,\boldsymbol{a}^0$ (знак зависит от направления силы $\boldsymbol{F}_B$) и $d\overline{AB} = d\rho_{AB}\boldsymbol{a}^0 + \rho_{AB}\,d\boldsymbol{a}^0$. В результате, учитывая, что $\boldsymbol{a}^0 \cdot \boldsymbol{a}^0 = 1$ и $\boldsymbol{a}^0 \cdot d\boldsymbol{a}^0 = 0$, получим

$$\boldsymbol{F}_A \cdot d\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{F}_B \cdot d\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{F}_B \cdot d\overline{AB} = \pm f(\rho_{AB})\,d\rho_{AB}.$$

Отсюда следует, что элементарная работа внутренних сил, с которыми две точки системы действуют друг на друга, равна произведению силы взаимодействия на дифференциал расстояния между этими точками. Итак, если внутренние силы зависят только от расстояния, то

$$\sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{i} \cdot d\boldsymbol{r}_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{k,\,l} [\pm f(\rho_{kl})\,d\rho_{kl}].$$

Положим, что

$$\frac{1}{2} \sum_{k,\,l} [\pm f(\rho_{kl})\,d\rho_{kl}] = dU^{(i)}, \tag{24}$$

где $U^{(i)}$ есть функция взаимных расстояний между точками системы, которая называется потенциалом внутренних сил (такая функция существует, потому что каждый член суммы есть дифференциал некоторой функции от ρ_{kl}); тогда уравнение (22) можно представить в виде

$$dT - dU^{(i)} = \sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{e} \cdot d\boldsymbol{r}_{\nu},$$

или

$$d\left(T + V^{(i)}\right) = \sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{e} \cdot d\boldsymbol{r}_{\nu}, \tag{25}$$

где $V^{(i)} = -U^{(i)}$ есть потенциальная энергия внутренних сил, или, просто, внутренняя потенциальная энергия системы.

Если мы имеем неизменяемую систему, то для такой системы все $d\rho_{kl} = 0$, потому что расстояния между точками системы не изменяются; поэтому

$$\sum_{kl} [\pm f(\rho_{kl})\,d\rho_{kl}] = dU^{(i)} = 0,$$

откуда $U^{(i)} = \text{const}$.

В этом случае работа внешних сил идет только на приращение кинетической энергии системы. Если система изменяемая, то, как показывает формула (25), работа внешних сил идет и на приращение кинетической энергии, и на изменение внутренней энергии системы (например, упругой энергии). Итак, для неизменяемой системы имеем

$$dT = \sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{e} \cdot d\boldsymbol{r}_{\nu}, \tag{26}$$

т е *дифференциал кинетической энергии неизменяемой системы равен сумме элементарных работ внешних сил.* Эту теорему можно также представить в интегральной форме, аналогичной (23).

Допустим, что внешние силы, работа которых отлична от нуля, потенциальны (нулю может равняться работа идеальных связей; подробнее об этом см. § 7, п. 2). Тогда

$$\sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{e} \cdot d\boldsymbol{r}_{\nu} = dU^{(e)} = -dV^{(e)},$$

где $V^{(e)}$ — внешняя потенциальная энергия системы, и уравнение (25) дает $d\left(T + V^{(i)} + V^{(e)}\right) = 0$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае имеет место интеграл энергии

$$T + V^{(i)} + V^{(e)} = \text{const} \quad \text{или} \quad E = \text{const},$$

где E — полная механическая энергия системы. Механическую систему, для которой имеет место интеграл энергии, называют *консервативной.*

Рассмотрим теперь теорему об изменении кинетической энергии системы при ее движении относительно центра масс, т. е. относительно подвижной системы отсчета, перемещающейся вместе с центром масс поступательно.

Для движения по отношению к основной (инерциальной) системе отсчета имеем

$$dT = \sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{e} \cdot d\boldsymbol{r}_{\nu} + \sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{i} \cdot d\boldsymbol{r}_{\nu}. \tag{27}$$

На основании теоремы Кенига [§ 2, формула (11)] будет

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} v_{\nu}'^2. \tag{28}$$

Кроме того, $r_\nu = r_C + r'_\nu$, где r_C — координата центра масс, а r'_ν — координата точки с массой m_ν относительно подвижных осей $Cx'y'z'$ (см рис 6); поэтому

$$\sum_{\nu=1} F^e_\nu \cdot dr_\nu + \sum_{\nu=1} F^i_\nu \cdot dr_\nu = \\ = \sum_\nu F^e_\nu \cdot dr_C + \sum_\nu F^e_\nu \cdot dr'_\nu + \sum_\nu F^i_\nu \cdot dr_C + \sum_\nu F^i_\nu \cdot dr'_\nu$$

или

$$\sum_\nu F^e_\nu \cdot dr_\nu + \sum_\nu F^i_\nu \cdot dr_\nu = \\ = \sum_\nu F^e_\nu \cdot dr_C + \sum_\nu F^e_\nu \cdot dr'_\nu + \sum_\nu F^i_\nu \cdot dr'_\nu, \quad (29)$$

так как третий член правой части предыдущего равенства

$$\sum_\nu F^i_\nu \cdot dr_C = dr_C \cdot \sum_\nu F^i_\nu = 0,$$

поскольку по третьему закону Ньютона

$$\sum_{\nu=1}^{n} F^i_\nu = 0.$$

Вставляя в уравнение (27) выражения (28) и (29), получим

$$d\left(\frac{1}{2} M v_C^2\right) + d\left(\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v'^2_\nu\right) = \\ = \sum_\nu F^e_\nu \cdot dr_C + \sum_\nu F^e_\nu \cdot dr'_\nu + \sum_\nu F^i_\nu \cdot dr'_\nu. \quad (30)$$

Так как центр масс системы движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы и в которой сосредоточена вся масса системы, то для него, как и для всякой материальной точки, имеет место теорема об изменении кинетической энергии, т е.

$$d\left(\frac{1}{2} M v_C^2\right) = \sum_\nu F^e_\nu \cdot dr_C; \quad (31)$$

поэтому, сокращая в равенстве (30) равные члены, получаем

$$d\left[\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v'^2_\nu\right] = \sum_\nu F^e_\nu \cdot dr'_\nu + \sum_\nu F^i_\nu \cdot dr'_\nu. \quad (32)$$

Уравнение (32) выражает теорему об изменении кинетической энергии для движения системы относительно ее центра масс, а именно: *дифференциал кинетической энергии системы в ее движении относительно центра масс равен сумме элементарных работ всех внутренних и внешних сил на перемещениях их точек приложения по отношению к центру масс.*

Примеры. Теорема об изменении кинетической энергии позволяет устанавливать зависимость между перемещением системы и скоростями ее точек (тел) в начале и в конце перемещения. Для систем с одной степенью свободы с помощью этой теоремы составляется дифференциальное уравнение движения.

1. Однородный брус AB весом P положен на два одинаковых сплошных цилиндрических катка, весом Q каждый, которые могут катиться без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 20). К брусу приложена постоянная сила F. Пренебрегая сопротивлением качению, найти скорость бруса

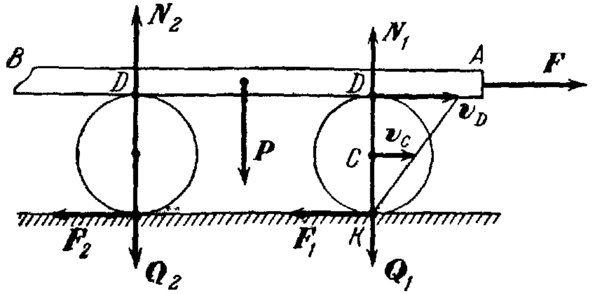


Рис 20.

в зависимости от его перемещения s, а также ускорение бруса. Движение начинается из состояния покоя, брус по каткам не скользит.

Применим для решения уравнение (23):

$$T - T_0 = \sum_\nu A^e_\nu + \sum_\nu A^i_\nu. \quad (а)$$

В нашем случае $T_0 = 0$, а $T = T_1 + 2T_2$, где T_1 — кинетическая энергия бруса, T_2 — катка. Брус движется поступательно; следовательно, $T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$, где v — скорость бруса. Величину T_2 подсчитаем по теореме Кёнига (§ 2, формула (15)):

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_c^2 + \frac{1}{2}J_{Cx}\omega^2. \quad (б)$$

Выразим здесь все скорости через искомую скорость v. Учитывая, что точка K является мгновенным центром вращения, будем иметь $\omega = \frac{v_C}{R}$, где R - радиус катка. Далее момент инерции $J_{Cx} = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2$. Наконец, так как брус по катку не скользит, то скорость верхней точки катка $v_D = v$ и $v_C = v/2$. Подставляя все эти значения в равенство (б), получим

$$T_2 = \frac{3}{4}\frac{Q}{g}v_C^2 = \frac{3}{16}\frac{Q}{g}v^2. \quad (в)$$

Следовательно,

$$T = T_1 + 2T_2 = \frac{1}{8g}(4P + 3Q)v^2. \quad (г)$$

Перейдем к вычислению работы. Внешними силами, действующими на каток, являются F, P, Q_1, Q_2 ($Q_1 = Q_2 = Q$), N_1, N_2 и F_1, F_2, где F_1 и F_2 — силы трения, препятствующие скольжению катков. Работа сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}_1$ и $\boldsymbol{Q}_2$ равна нулю, так как они перпендикулярны к перемещениям их точек приложения. Для точки K имеем $\boldsymbol{v}_K=0$ и $d\boldsymbol{r}_K=\boldsymbol{v}_K\,dt=0$. Поэтому $\boldsymbol{N}_1\cdot d\boldsymbol{r}_K=0$, $\boldsymbol{F}_1\cdot d\boldsymbol{r}_K=0$; следовательно, работа этих сил на конечном перемещении будет также равна нулю. Аналогичный результат получим для сил $\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{F}_2$, а также для внутренних сил давления и трения, действующих в точках D касания бруса и катков (относительные скорости перемещения этих точек равны нулю, как и скорость точки K). Следовательно, работу совершает только сила $\boldsymbol{F}$ и $A^e=F\cdot s$.

Подставляя все найденные значения в уравнение (а), получим

$$\frac{1}{8g}(4P+3Q)\,v^2=F\cdot s, \tag{д}$$

откуда

$$v=2\sqrt{\frac{2gFs}{4P+3Q}}.$$

Для определения ускорения бруса продифференцируем обе части равенства (д) по времени; будем иметь

$$\frac{1}{4g}(4P+3Q)\,v\,\frac{dv}{dt}=F\,\frac{ds}{dt}.$$

Но $\dfrac{ds}{dt}=v$, поэтому, сокращая, найдем окончательно

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{4F}{4P+3Q}\,g.$$

Обращаем внимание на примененный здесь прием определения ускорения с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

2. К брусу D массы m_1, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплен шарнирно в точке A однородный стержень AB, имеющий массу m_2 и длину l (рис. 21). Система начинает движение из состояния покоя в момент, когда стержень отклонен до горизонтального положения AB_0.

Пренебрегая трением в оси A, найти скорость v бруса в тот момент, когда стержень проходит через вертикаль.

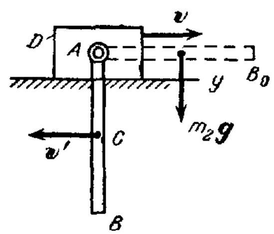


Рис. 21.

Обратимся опять к уравнению (23). Так как внутренние силы работы не совершают, то, обозначая кинетическую энергию системы в момент, когда стержень вертикален, через T_1, будем иметь

$$T_1-T_0=\sum_{\nu}A_{\nu}^{e}. \tag{а}$$

Здесь $T_0=0$, а $T_1=T_D+T_{AB}$. Пользуясь для вычисления T_{AB} теоремой Кенига, имеем

$$T_D=\frac{1}{2}m_1v^2,\quad T_{AB}=\frac{1}{2}m_2v_C^2+\frac{1}{2}J_{Cx}\omega^2, \tag{б}$$

где ω — угловая скорость стержня, а момент инерции $J_{Cx}=\dfrac{1}{12}m_2l^2$. Скорость $\boldsymbol{v}_C$ центра масс стержня складывается из относительной (по отношению

к брусу) скорости $\boldsymbol{v}'$, численно равной $0{,}5\,l\omega$ и переносной скорости $\boldsymbol{v}$; следовательно, $v_C=0{,}5l\omega-v$. В результате

$$T_1=\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{l^2\omega^2}{4}+v^2-l\omega v\right)+\frac{m_2l^2}{24}\omega^2=$$
$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v^2+\frac{m_2l^2\omega^2}{6}-\frac{1}{2}m_2l\omega v. \tag{в}$$

Чтобы исключить отсюда величину ω, заметим, что все действующие на систему внешние силы вертикальны. Следовательно, сумма их проекций на горизонтальную ось y равна нулю и проекция количества движения $\boldsymbol{Q}$ системы на эту ось должна быть величиной постоянной. Так как $Q_0=0$, то $Q_y=m_1v_y+m_2v_{Cy}=0$. Учитывая направления $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_C$, находим отсюда

$$m_1v=m_2v_C=m_2\left(\frac{l}{2}\omega-v\right)\quad\text{и}\quad l\omega=\frac{2(m_1+m_2)}{m_2}\,v.$$

Подставляя это значение $l\omega$ в равенство (в), найдем окончательно

$$T_1=\frac{(4m_1+m_2)(m_1+m_2)}{6m_2}\,v^2. \tag{г}$$

Работу здесь совершает только сила тяжести m_2g; при этом $A^e=0{,}5l\cdot m_2g$. Следовательно, уравнение (а) принимает вид

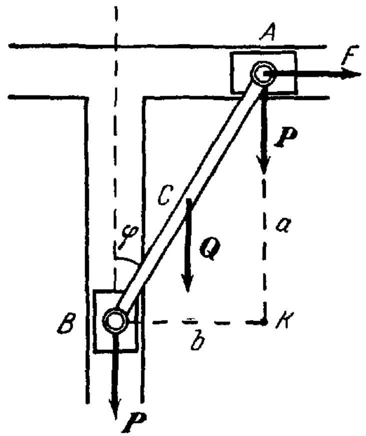


Рис. 22.

$$T_1=\frac{1}{2}\,l\cdot m_2\boldsymbol{g}.$$

Заменяя здесь T_1 найденным значением, получим окончательно

$$v=\frac{m_2\sqrt{3gl}}{\sqrt{(4m_1+m_2)(m_1+m_2)}}.$$

3. Ползуны A и B, весом P каждый, соединены прикрепленным к ним шарнирно однородным стержнем длиной l и весом Q (рис. 22). Ползуны могут скользить без трения по взаимно перпендикулярным направляющим (одна из которых горизонтальна). На ползун A действует горизонтальная сила F, изменяющаяся по закону $F=F_0\sin pt$. Считая величину F_0 малой по сравнению с P и Q, найти закон малых колебаний системы, если в момент $t=0$ она находится в равновесном положении.

Составим дифференциальное уравнение движения системы, пользуясь равенством (26), которое представим в виде

$$dT=\sum d'A_{\nu}^{e}, \tag{а}$$

где $d'A_{\nu}^{e}$ — элементарные работы внешних сил. Положение системы будем определять углом φ отклонения стержня от вертикали, считая его при малых колебаниях малым. Имеем

$$T=T_A+T_B+T_{AB}.$$

Воспользуемся тем, что точка K является мгновенным центром вращения для стержня AB. Тогда $v_A=a\dot\varphi$, $v_B=b\dot\varphi$, где $a=AK$, $b=BK$; пользуясь тем, что формула (14) § 2 справедлива и для мгновенного вращения, получим

$$T_A=\frac{1}{2}\frac{P}{g}a^2\dot{\varphi}^2,\quad T_B=\frac{1}{2}\frac{P}{g}b^2\dot{\varphi}^2,\quad T_{AB}=\frac{1}{2}J_{Kx}\dot{\varphi}^2.$$

Но так как точки K и A находятся на одинаковом расстоянии $l/2$ от центра масс C стержня, то по теореме Гюйгенса $J_{Kx}=J_{Ax}=Ql^2/3g$. В результате, учитывая, что $a^2+b^2=l^2$, будем иметь

$$T=\frac{1}{2g}\left(P+\frac{Q}{3}\right)l^2\dot{\varphi}^2. \tag{б}$$

Для вычисления элементарной работы воспользуемся тем, что она равна моменту силы относительно оси поворота на элементарный угол поворота [см. ч. I, § 30, формула (21)]. Так как в нашем случае момент относительно оси Kx совпадает с моментом относительно центра K, то

$$\sum d'A_\nu^e=\left(-Pl\sin\varphi-Q\frac{l}{2}\sin\varphi+Fl\cos\varphi\right)d\varphi.$$

Вычисляя из равенства (б) dT и подставляя все значения в уравнение (a), получим

$$\frac{l^2}{g}\left(P+\frac{Q}{3}\right)\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\,dt=\left[-\left(P+\frac{Q}{2}\right)\sin\varphi+F\cos\varphi\right]l\,d\varphi.$$

Но $\dot{\varphi}\,dt=d\varphi$. Поэтому, произведя сокращение, найдем дифференциальное уравнение движения системы в виде

$$\frac{l}{3g}(3P+Q)\,\ddot{\varphi}+\frac{2P+Q}{2}\sin\varphi=F_0\sin pt\cos\varphi. \tag{в}$$

Для малых колебаний, полагая $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$ и вводя обозначения

$$\frac{3g\,(2P+Q)}{2l\,(3P+Q)}=k^2,\quad \frac{3gF_0}{l\,(3P+Q)}=H_0, \tag{г}$$

будем иметь

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=H_0\sin pt. \tag{д}$$

Это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, общее решение которого имеет вид (см. ч. I, § 35, п. 3)

$$\varphi=a\sin(kt+\alpha)+\frac{H_0}{k^2-p^2}\sin pt. \tag{е}$$

Здесь a и α — постоянные интегрирования. Определяя их по начальным данным: при $t=0$ $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$, найдем окончательно закон колебаний

$$\varphi=\frac{H_0}{k^2-p^2}\left(\sin pt-\frac{p}{k}\sin kt\right). \tag{ж}$$

Система может совершать малые колебания вдали от зоны резонанса $p=k$. При этом, если $p\ll k$, то приближенно

$$\varphi=\frac{H_0}{k^2}\sin pt,$$

т. е. колебания являются вынужденными с частотой p и периодом $\tau=2\pi/p$.

Если же $p\gg k$, то приближенно

$$\varphi=\frac{H_0}{pk}\sin kt,$$

т. е. колебания будут собственными с частотой k и периодом $\tau=2\pi/k$, где значение k дается равенством (г)

Пример показывает, что, пользуясь теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, можно составить дифференциальное уравнение движения любой механической системы с одной степенью свободы при любых действующих на систему силах.

6. В кинематике мы имели теорему Шаля, согласно которой всякое движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольной точки тела, и движения тела около этой точки как неподвижной. Вышеизложенные теоремы динамики показывают, что за такую точку удобнее всего брать центр масс В самом деле, движение центра масс определяется по соответствующей теореме как движение материальной точки под действием всех приложенных к системе внешних сил, а к движению относительно центра масс теоремы об изменении кинетического момента и об изменении кинетической энергии применяются совершенно так же, как и к движению около неподвижной точки. Поэтому всякое движение механической системы можно изучать, рассматривая его как совокупность двух движений: поступательного, определяемого движением центра масс, и движения около центра *масс как неподвижной точки.*

§ 4. Динамика точки переменной массы

1. Понятие о теле и точке переменной массы. Под механической системой мы понимаем такую совокупность материальных точек, в которой положение или движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных. Эта зависимость обусловлена наличием сил взаимодействия между точками системы (внутренних сил). До сих пор мы считали множество точек, образующих каждую рассматриваемую систему, неизменным. Между тем на практике могут иметь место случаи, когда в некоторые моменты времени t_1, t_2, ... взаимодействие каких-то отдельных точек системы с остальными ее точками практически мгновенно прекращается; таким образом, эти точки после моментов времени t_1, t_2, ... уже не будут входить в рассматриваемую систему. В результате состав, т. е. множество точек, образующих данную систему, а следовательно, и масса системы будут со временем изменяться. Аналогично могут иметь место случаи, когда в какие-то моменты времени t_1, t_2, ... с рассматриваемой системой мгновенно начинают взаимодействовать точки, до этого в данную систему не входившие (с нею не взаимодействовавшие) В результате также будет происходить изменение состава системы и ее массы. Примером может служить движущийся транспортер, с которого в какие-то моменты времени снимают (или на который кладут) грузы.

Для изучения движения системы в указанных случаях нужно всякий раз после моментов времени t_1, t_2, ... составлять для образовавшейся новой системы свои уравнения движения, учитывая мгновенное изменение ее скорости в момент отделения (присоединения) частицы методами теории удара (гл. VII).

Однако в ряде случаев процесс отделения (или присоединения) частиц можно практически считать непрерывным, а следовательно, рассматривать как непрерывный и процесс изменения массы системы.

Примерами таких систем в природе являются плавающая льдина, масса которой убывает при таянии или возрастает при намерзании, планета, масса которой изменяется вследствие оседания метеоритной пыли и т. д., а в технике — ракета на активном участке траектории или реактивный самолет, масса которых убывает при выгорании топлива, веретено, на которое наматывается или с которого сматывается нить, и т. п.

Систему (в частности, тело), масса которой непрерывно изменяется со временем вследствие изменения состава системы, т. е. непрерывного присоединения к ней или отделения от нее частиц, и принято называть системой (телом) переменной массы. Если расстояния, проходимые точками тела, велики по сравнению с его размерами или если тело движется поступательно, то его (пренебрегая изменением положения центра масс, происходящим в процессе отделения или присоединения частиц) можно рассматривать как точку переменной массы. Движение такой точки переменной массы мы и рассмотрим, полагая, что масса M этой точки является непрерывной и дифференцируемой функцией времени $M(t)$ и что взаимодействие с этой точкой отделяющихся частиц после отделения мгновенно прекращается, а присоединяющиеся частицы до момента присоединений с этой точкой не взаимодействуют Для такой точки можно составить дифференциальные уравнения, описывающие ее движение в течение всего времени изменения массы.

2. Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы (уравнения Мещерского). Составим уравнение движения точки переменной массы, масса которой изменяется вследствие одновременного отделения и присоединения частиц Обозначим в момент времени t через $M(t)$ всю массу точки, через $M_1(t)$ — массу вошедших в ее состав присоединяющихся частиц и через $M_2(t)$ — массу входящих в ее состав отделяющихся частиц; здесь $M_1(t)$ — возрастающая функция ($dM_1 > 0$), а M_2 — убывающая ($dM_2 < 0$), функция же $M(t)$ может быть как возрастающей, так и убывающей и, в частности, постоянной

Применим теорему об изменении количества движения к системе, состоящей из точки с массой $M(t)$, присоединяющейся к ней за

малый промежуток времени Δt частицы с массой ΔM_1 и отделяющейся от нее в течение того же промежутка времени частицы с массой $|\Delta M_2|$ (рис. 23). По сделанным выше предположениям, указанные частицы и точка взаимодействуют, т. е. образуют механическую систему лишь в момент времени t (после отделения или до присоединения взаимодействия нет). Поэтому результаты наших рассуждений будут справедливы, когда мы совершим предельный переход, полагая $\Delta t \to 0$. Упомянутая теорема дает

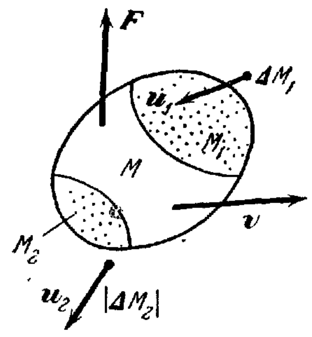


Рис. 23.

$$Q_1 - Q_0 = F\,\Delta t, \tag{1}$$

где Q_0 — количество движения системы в момент t, а Q_1 — в момент $t+\Delta t$; F — равнодействующая приложенных к точке сил. Обозначим абсолютную скорость точки с массой $M(t)$ через v, а абсолютные скорости присоединяющейся частицы с массой ΔM_1 и отделяющейся частицы с массой $|\Delta M_2|$ через u_1 и u_2 соответственно. Тогда

$$Q_0 = Mv + \Delta M_1 \cdot u_1,$$

$$Q_1 = (M + \Delta M_1 - |\Delta M_2|)(v + \Delta v) + |\Delta M_2|\, u_2,$$

где Δv — приращение скорости точки за промежуток времени Δt. Подставляя эти величины в уравнение (1) и учитывая, что $|\Delta M_2| = -\Delta M_2$ (масса частицы — величина положительная, а $M_2(t)$ — функция убывающая), получим

$$M\Delta v + \Delta M_1 (v - u_1) + \Delta M_2 (v - u_2) + (\Delta M_1 + \Delta M_2)\Delta v = F\,\Delta t.$$

Отсюда, деля обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, найдем окончательно

$$M\frac{dv}{dt} = F + (u_1 - v)\frac{dM_1}{dt} + (u_2 - v)\frac{dM_2}{dt}. \tag{2}$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения точки переменной массы или обобщенное уравнение И. В. Мещерского, составленное для случая одновременного отделения и присоединения частиц.

Если имеет место только присоединение (или только отделение) частиц, то $\frac{dM_1}{dt} = \frac{dM}{dt}$ $\left(\text{или } \frac{dM_2}{dt} = \frac{dM}{dt}\right)$, и уравнение (2) принимает вид

$$M\frac{dv}{dt} = F + (u - v)\frac{dM}{dt}. \tag{3}$$

где $\boldsymbol{u}$ — абсолютная скорость присоединения (или отделения) частиц. Уравнение в виде (3) было получено И. В. Мещерским в 1897 г., а в обобщенном виде (2) опубликовано в работе 1904 г.

Величина $\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ представляет собой относительную (по отношению к основной точке с массой M) скорость присоединения (отделения) частиц. Если ввести эту величину, то уравнение (3) примет вид

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{u}_r\frac{dM}{dt}. \qquad (4)$$

Как видим, и при отделении и при присоединении частиц уравнения (3) или (4) имеют один и тот же вид, с той лишь разницей, что в случае присоединения частиц $\frac{dM}{dt} > 0$, а в случае их отделения $\frac{dM}{dt} < 0$.

Если абсолютная скорость присоединяющихся (отделяющихся) частиц равна нулю, т. е. $\boldsymbol{u} = 0$, то уравнение (3) можно представить в виде

$$\frac{d(M\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}, \qquad (5)$$

если же относительная скорость присоединяющихся (отделяющихся) частиц есть нуль, т. е. $\boldsymbol{u}_r = 0$, то уравнение Мещерского принимает такой же вид, как для точки постоянной массы, т. е.

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}, \qquad (6)$$

однако M в левой части является при этом величиной переменной.

Заметим, наконец, что если ввести величину

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{u}_r\frac{dM}{dt}, \qquad (7)$$

то уравнение (4) можно представить тоже в виде уравнения движения точки постоянной массы

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi}. \qquad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что эффект отделения (присоединения) частиц эквивалентен действию на точку (тело) некоторой добавочной силы $\boldsymbol{\Phi}$, называемой *реактивной силой.*

Обозначим через $G_{сек} = \left|\frac{dM}{dt}\right|$ секундный расход отделяемой (или присоединяемой) массы, и пусть $\boldsymbol{\Phi}_1$ и $\boldsymbol{\Phi}_2$ — реактивные силы соответственно при присоединении и отделении частиц. Тогда

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = G_{сек}\boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = -G_{сек}\boldsymbol{u}_r, \qquad (9)$$

т. е. реактивная сила равна численно произведению секундного расхода массы на относительную скорость отделения (присоединения) частиц и направлена противоположно вектору $\boldsymbol{u}_r$ в случае отделения частиц и так же, как вектор $\boldsymbol{u}_r$, в случае присоединения частиц.

Отметим в заключение, что преобразования, проделанные с уравнением (3), можно таким же образом произвести и с обобщенным уравнением (2).

Рассмотрим несколько примеров приложения уравнений Мещерского.

3. Движение ракеты вне поля сил. Формула Циолковского. В качестве первого примера рассмотрим случай поступательного движения ракеты вне поля сил (1-я задача Циолковского). Тогда, полагая в равенстве (4) $\boldsymbol{F} = 0$, получим для движения ракеты в этом случае векторное уравнение

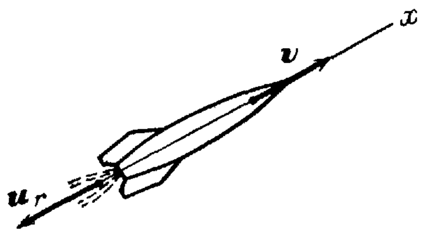


Рис. 24.

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{u}_r\frac{dM}{dt}. \qquad (10)$$

Направим ось x вдоль вектора скорости $\boldsymbol{v}$ ракеты (рис. 24) и допустим, что относительная скорость отделения частиц $\boldsymbol{u}_r$ (скорость вылета продуктов горения топлива из сопла ракетного двигателя) постоянна и направлена противоположно $\boldsymbol{v}$. Тогда, проектируя обе части равенства (10) на ось x и учитывая, что $v_x = v$, $u_{rx} = -u_r$, будем иметь

$$M\,dv = -u_r\,dM.$$

Отсюда, интегрируя и полагая в начальный момент скорость ракеты равной v_0, а массу равной M_0, получим окончательно

$$v = v_0 + u_r \ln\frac{M_0}{M}. \qquad (11)$$

Формула (11) устанавливает, по какому закону возрастает скорость ракеты с уменьшением ее массы. Если начальную массу топлива обозначить $M_т$, а массу корпуса ракеты со всем оборудованием и полезным грузом через $M_к$, то $M_0 = M_к + M_т$, а масса ракеты в момент, когда сгорит все топливо, будет равна $M_к$. В результате найдем, что предельная (наибольшая) скорость, которую получает ракета, когда будет израсходовано все топливо, определяется равенством

$$v_1 = v_0 + u_r \ln\left(1 + \frac{M_т}{M_к}\right). \qquad (12)$$

Это известная формула К. Э. Циолковского, опубликованная в его работе 1903 г.

Из формулы Циолковского следует тот интересный факт, что предельная скорость ракеты зависит только от относительного запаса топлива и относительной скорости истечения продуктов его горения, от того, по какому закону расходуется топливо, предельная скорость ракеты не зависит

Для закона движения ракеты в рассматриваемом случае получаем из (11), полагая, что при $t_0=0$, $x=0$:

$$x = v_0 t + u_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)}\, dt \tag{13}$$

Следовательно, закон движения будет зависеть от закона расхода топлива, т е от вида зависимости $M(t)$, которая для вычисления интеграла, входящего в правую часть равенства (13), должна быть задана

4. Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести. Рассмотрим ракету, движущуюся вертикально вверх в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления среды (2-я задача Циолковского). Направим ось x также по вертикали вверх и примем, что вектор $\boldsymbol{u}_r$ относительной скорости отделения частиц постоянен и направлен по вертикали вниз (рис. 25). Учитывая, что на ракету действует сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$, получим уравнение движения (4) в проекции на ось x в виде

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg - u_r \frac{dM}{dt}. \tag{14}$$

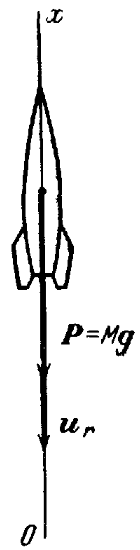


Рис. 25.

Интегрируя это уравнение и полагая, что при $t=0$ $M=M_0$, $v_0=0$, найдем следующий закон изменения скорости.

$$v = u_r \ln\frac{M_0}{M} - gt \tag{15}$$

Для дальнейшего интегрирования уравнения (15) надо задать какой-то закон изменения массы Примем, что масса M убывает по показательному закону

$$M = M_0 e^{-\alpha t}, \tag{16}$$

где α — постоянный коэффициент, характеризующий быстроту изменения массы. Тогда уравнение (15) примет вид

$$v = \frac{dx}{dt} = (\alpha u_r - g)\,t. \tag{17}$$

Отсюда, интегрируя и считая при $t=0$ $x=0$, найдем закон движения ракеты:

$$x = (\alpha u_r - g)\frac{t^2}{2}. \tag{18}$$

В этом равенстве αu_r есть, очевидно, ускорение, сообщаемое ракете реактивной силой, в чем можно убедиться и непосредственно; в самом деле, вычисляя с учетом равенства (16) реактивную силу, по формуле (7), получим

$$\Phi_x = -u_r\frac{dM}{dt} = \alpha u_r M_0 e^{-\alpha t} = \alpha u_r M.$$

Из уравнения (17) следует очевидный вывод, что вертикальный подъем при $v_0=0$ возможен лишь в случае, когда $\alpha u_r > g$, т. е. когда ускорение, сообщаемое реактивной силой, больше ускорения силы тяжести

Допустим теперь, что масса ракеты может убывать до некоторого значения M_1 (разность $M_0 - M_1$ равна запасу топлива), и найдем, какой будет полная высота H подъема ракеты. Время t_1 движения под действием реактивной силы (активный участок траектории) определяется из равенства $M_1 = M_0 e^{-\alpha t_1}$, откуда

$$t_1 = \frac{n}{\alpha}, \tag{19}$$

где

$$n = \ln\frac{M_0}{M_1}. \tag{19'}$$

Подставляя это значение t_1 в равенства (18) и (17), найдем для длины x_1 активного участка и скорости v_1 в конце этого участка значения

$$x_1 = n^2\frac{\alpha u_r - g}{2\alpha^2}, \qquad v_1 = n\frac{\alpha u_r - g}{\alpha}. \tag{20}$$

После момента t_1 масса ракеты остается постоянной; имея в этот момент скорость v_1, ракета пройдет еще до наивысшей точки путь

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = n^2\frac{(\alpha u_r - g)^2}{2g\alpha^2}.$$

Тогда для полной высоты подъема получим значение $H = x_1 + h$ или

$$H = n^2\left(\frac{u_r^2}{2g} - \frac{u_r}{2\alpha}\right). \tag{21}$$

Как видим, H, в отличие от v, зависит от параметра α, определяющего быстроту расхода топлива. При этом H тем больше, чем больше α. Наибольшая высота подъема

$$H^* = \frac{n^2 u_r^2}{2g} \tag{21'}$$

получается при $\alpha = \infty$, т. е. при мгновенном сгорании топлива. Практически этот результат означает, что для получения наибольшей высоты подъема в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления надо возможно быстрее сжигать топливо

Решим теперь другую экстремальную задачу. Найдем, при каком значении α длина активного участка x_1 будет наибольшей (такой режим обеспечит движение с наименьшим ускорением, т. е. с наименьшими перегрузками). *Из (20) получаем*

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = \frac{2g - u_r \alpha}{2\alpha^3} n^2.$$

Приравнивая эту производную нулю, найдем, что указанный оптимальный режим имеет место, когда

$$\alpha = \frac{2g}{u_r}, \tag{22}$$

т. е. когда ускорение, сообщаемое реактивной силой, вдвое больше ускорения силы тяжести. По знаку второй производной легко убедиться, что при найденном значении α величина x_1 действительно имеет максимум. Из равенств (20) и (21) находим, что при $\alpha u_r = 2g$

$$x_{1\,\max} = \frac{n^2 u_r^2}{8g}, \qquad H = \frac{n^2 u_r^2}{4g}.$$

Полная высота подъема H в этом случае вдвое меньше оптимальной, определяемой равенством (21′)

Можно поставить еще одну оптимальную задачу: при заданной длине активного участка x_1 найти значение α, для которого число n (характеризующее у ракеты запас топлива) будет наименьшим. Для этого из (20) выражаем n^2 через x_1 и α; находим

$$n^2 = \frac{2x_1\alpha^2}{\alpha u_r - g}.$$

Вычисляя отсюда производную от n^2 по α и приравнивая ее нулю, получим, что n имеет минимум при том же значении α, которое определяется равенством (22). Таким образом, в данном случае один и тот же закон изменения массы обеспечивает максимум x_1 при заданном значении n и минимум n при данной величине x_1.

Рассмотрим теперь другую, так называемую обратную задачу: найдем, по какому закону должна изменяться масса ракеты, чтобы ракета совершала вертикальный подъем с постоянной скоростью. Для этого положим в уравнении (14) $v = \mathrm{const}$; получим для определения закона изменения массы уравнение

$$u_r \frac{dM}{dt} + Mg = 0. \tag{23}$$

Отсюда, интегрируя и полагая при $t = 0$ $M = M_0$, найдем

$$M = M_0 e^{-\frac{g}{u_r} t}. \tag{24}$$

Таким образом, равномерный подъем ракеты возможен только в том случае, когда закон изменения массы имеет вид (16); при этом должно быть $\alpha = g/u_r$, или $\alpha u_r = g$ (ускорение, сообщаемое реактивной силой, равно ускорению силы тяжести).

При выводе уравнения (14), а следовательно, и (23) мы считали вектор $\boldsymbol{u}_r$ направленным вертикально вниз.

Рассмотрим еще, какой результат получится, если считать скорость $\boldsymbol{u}_r$ направленной по вертикали вверх. Тогда в уравнении (23) вместо u_r будет стоять $-u_r$, и мы, интегрируя, получим

$$M = M_0 e^{\frac{g}{u_r} t}. \tag{24′}$$

Следовательно, равномерное движение по вертикали возможно и тогда, когда масса возрастает по показательному закону. В этом случае реактивная сила направлена так же, как вектор $\boldsymbol{u}_r$, т. е. вертикально вверх, и уравновешивает силу тяжести. Такой случай мог бы иметь место, конечно, не при движении ракеты, а, например, при падении капли воды в насыщенной водяными парами атмосфере, если допустить, что масса капли вследствие конденсации на ее поверхности пара будет возрастать по закону (24′), а сопротивление движению пренебрежимо мало.

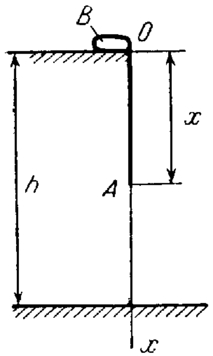


Рис. 26.

5. Вертикальное движение тяжелой нити. Механика тел переменной массы находит интересные приложения и в динамике нити. Рассмотрим следующую задачу. Пусть нерастяжимая гибкая однородная нить AB длиною l смотана в клубок, лежащий на краю стола (рис. 26). Высота стола над полом равна $h < l$. Исследуем процесс падения нити со стола на пол, пренебрегая сопротивлением разматыванию нити, а также сопротивлением воздуха при ее движении. Задача распадается на 3 этапа: 1) с момента начала движения до момента, когда свободный конец A нити коснется пола; 2) от конца первого этапа до момента, когда другой конец B нити сходит со стола; 3) от конца второго этапа и до момента, когда конец B нити коснется пола.

1) Переходя к рассмотрению первого этапа движения, проведем координатную ось Ox вертикально вниз, беря начало координат O в плоскости стола, и будем положение нити при ее движении определять координатой x точки A (рис. 26). Найдем движение нити при начальных условиях

$$t_0 = 0, \qquad x = 0, \qquad v = \dot{x} = 0. \tag{25}$$

Из физических соображений ясно, что условиями (25) последующее движение не определяется однозначно: если считать, что в момент $t_0=0$ точка A не имеет ускорения, то нить будет оставаться в покое; если же точка A имеет ускорение (со стола свешивается бесконечно малый элемент нити), то нить придет в движение. Нас будет интересовать второй случай.

Составим уравнение движения нити. В произвольный момент времени t со стола свешивается отрезок нити OA длиною $x<h$, который движется поступательно и может рассматриваться как точка с переменной массой $M=\rho x$, где ρ — масса единицы длины нити. К этому отрезку непрерывно присоединяются частицы нити, свернутой в клубок, имея в момент присоединения абсолютную скорость $u=0$. Следовательно, уравнение движения нити (уравнение (3)) имеет вид

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{v}\frac{dM}{dt},$$

где $\boldsymbol{F}$ — в данном случае действующая на нить сила тяжести, численно равная $\rho x g$. Проектируя обе части этого уравнения на ось x и учитывая, что $v_x=v$, $F_x=F$, а $M=\rho x$, будем иметь

$$\rho x\frac{dv}{dt}=\rho g x-v\rho\frac{dx}{dt}. \tag{26}$$

Легко видеть, что уравнение (26) имеет особое решение $x\equiv 0$, удовлетворяющее начальным условиям (25), при котором и $w=\ddot{x}\equiv 0$. Это решение соответствует упомянутому выше случаю покоя нити. Будем искать другое решение уравнения (26), дающее интересующий нас случай движения нити. Для этого, учитывая, что $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$, приведем уравнение (26) к виду

$$\frac{x}{2}\frac{d(v^2)}{dx}+v^2=gx.$$

Общим решением этого линейного дифференциального уравнения первого порядка будет

$$v^2=\frac{2}{3}gx+\frac{C}{x^2}.$$

При начальных условиях (25) $C=0$; следовательно,

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{3}gx}. \tag{27}$$

Отсюда, интегрируя вторично, получим

$$2\sqrt{x}=\sqrt{\frac{2}{3}g}\,t,$$

и закон движения нити в рассматриваемой задаче будет

$$x=\frac{1}{6}gt^2. \tag{28}$$

Движение по такому закону длится до момента, когда станет $x=h$, т. е. в течение промежутка времени $t_1=\sqrt{\frac{6h}{g}}$. В момент t_1 конец A нити касается пола; скорость нити в этот момент, как видно из формулы (27), будет

$$v_1=\sqrt{\frac{2}{3}gh}. \tag{29}$$

2) С момента t_1 начинается второй этап движения нити (рис. 27). В течение этого этапа в движении находится отрезок нити, имеющий постоянную длину h, но состав этого отрезка все время изменяется: к нему непрерывно присоединяются частицы клубка, лежащего на столе (абсолютная скорость этих частиц в момент присоединения, как и в предыдущем случае, равна нулю, т. е. $u_1=0$); в то же время от указанного отрезка непрерывно отделяются частицы нити, падающие на пол, имея в момент отделения абсолютную скорость, равную скорости нити, т. е. $\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}$ (было бы ошибочно считать $\boldsymbol{u}_2=0$, так как когда скорость отделившейся частицы нити вследствие ее взаимодействия с полом обращается в нуль, взаимодействие этой частицы с движущимся отрезком нити отсутствует, поскольку нить не воспринимает усилий сжатия, а $\boldsymbol{u}_2$, как было отмечено при выводе уравнения Мещерского, представляет собой скорость отделяющейся частицы в момент, когда она еще взаимодействует с нитью). Таким образом, движение рассматриваемого отрезка нити описывается уравнением (2), которое при указанных значениях $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ принимает вид

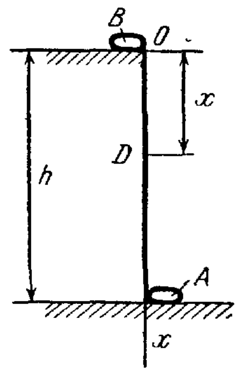


Рис. 27.

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{v}\frac{dM_1}{dt}. \tag{30}$$

Будем на этом этапе движения снова отсчитывать время от нуля, полагая $t_1=0$; далее, обозначим через x координату той точки D нити (см. рис. 27), которая в момент t_1 находилась в точке O (на краю стола). Тогда в уравнении (30) $M=\rho h=\text{const}$, $F=\rho gh$ и $M_1=\rho x$ [заметим одновременно, что здесь $M_2=\rho h-\rho x$, но в уравнение (30) эта величина не входит, так как $\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{v}=0$]. Проектируя обе части уравнения (30) на ось x и заменяя M, F и M_1 их значениями, получим

$$\rho h\frac{dv}{dt}=\rho hg-v\rho\frac{dx}{dt}.$$

Введем обозначение

$$a^2 = gh. \tag{31}$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{h}(a^2 - v^2). \tag{32}$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения точки постоянной массы, падающей вертикально в среде, где сопротивление пропорционально квадрату скорости. Интегрируя уравнение (32) и принимая во внимание, что при $t = t_1 = 0$ $v = v_1$, где v_1 определяется равенством (29), найдем окончательно для скорости движения нити выражение

$$v = a\frac{1 - ne^{-2\frac{a}{h}t}}{1 + ne^{-2\frac{a}{h}t}} = a\frac{e^{\frac{a}{h}t} - ne^{-\frac{a}{h}t}}{e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t}}, \tag{33}$$

где

$$n = \frac{a - v_1}{a + v_1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \approx 0{,}1.$$

Нетрудно также найти зависимость $v(x)$, если представить уравнение (32) в виде

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{h}(a^2 - v^2)$$

и проинтегрировать его, учитывая, что при $x = 0$ $v = v_1$. В результате будем иметь

$$v^2 = a^2 - (a^2 - v_1^2)e^{-2\frac{x}{h}}$$

или, так как, согласно равенствам (29) и (31), $v_1^2 = \frac{2}{3}gh = \frac{2}{3}a^2$,

$$v = a\sqrt{1 - \frac{1}{3}e^{-2\frac{x}{h}}}. \tag{34}$$

Из полученных результатов следует, что скорость падения нити стремится, и притом достаточно быстро, к предельной величине $v_{пр} = a = \sqrt{gh}$.

Используя формулу (34), легко подсчитать, что когда после момента t_1 с клубка смотается отрезок нити, равный $1{,}5h$, скорость его падения будет отличаться от предельной меньше чем на 1%. Поэтому, если $l \gg h$, скорость v_2 падения нити в конце второго этапа можно считать равной $a = \sqrt{gh}$; в противном случае эта скорость определяется по формуле (34).

Чтобы найти время падения нити до момента начала третьего этапа, следует проинтегрировать уравнение (33). Учитывая, что при $t = t_1 = 0$ $x = 0$, получим закон движения нити в виде

$$x = h\ln\frac{e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t}}{1 + n}. \tag{35}$$

Отсюда, полагая $x = l - 2h$, найдем время t_2 движения нити до конца второго этапа.

3) На третьем этапе (рис. 28) происходит непрерывный процесс уменьшения массы движущейся части нити, причем, как было установлено выше, абсолютная скорость отделяющихся частиц в момент отделения равна скорости нити $\boldsymbol{v}$, т. е. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Масса движущейся части нити $M = \rho(h - x)$, где x — координата конца B нити. Тогда, составляя для движущейся части нити уравнение (3) в проекции на ось x, получим

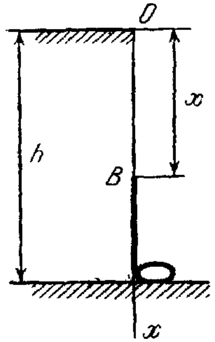


Рис. 28.

$$\rho(h - x)\frac{dv}{dt} = \rho(h - x)g \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = g.$$

Отсюда, ведя теперь отсчет времени от момента t_2 конца второго этапа, т. е. полагая $t_2 = 0$, и учитывая, что при $t_2 = 0$ $v = v_2$, найдем

$$v = v_2 + gt \quad \text{и} \quad x = v_2 t + \frac{gt^2}{2}. \tag{36}$$

Таким образом, конец B нити в этом случае падает с постоянным ускорением g как свободная материальная точка постоянной массы. Скорость конца B можно еще представить в виде

$$v = \sqrt{v_2^2 + 2gx}. \tag{37}$$

Время t_3 движения нити до конца третьего этапа и скорость v_3 точки в момент падения на пол найдутся из уравнений (36) и (37), если в них положить $x = h$.

В частности, считая $l \gg h$ и принимая $v_2 = a = \sqrt{gh}$, найдем, что

$$v_3 = \sqrt{3gh}, \quad t_3 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\frac{h}{g}} \approx 0{,}73\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Все время движения нити от начала первого этапа до конца третьего будет $T = t_1 + t_2 + t_3$.

Рассмотренная задача интересна тем, что в ней на первом этапе происходит движение системы при непрерывном присоединении частиц, на втором — при одновременном непрерывном присоединении и отделении частиц и, наконец, на третьем — при непрерывном отделении частиц.

ГЛАВА ВТОРАЯ

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 5. Принцип Даламбера

1. Принцип Даламбера для точки. В применении к одной материальной точке принцип Даламбера заключается, как известно, в том, что в каждый момент движения действующие на точку активные силы и реакции связей можно уравновесить добавлением к ним силы инерции (см. ч. I, § 38, п. 15). Если сумму всех действующих на точку с массой m активных сил обозначим через $\boldsymbol{F}$, ускорение — через $\boldsymbol{w}$ и сумму всех реакций связей (пассивных сил) — через $\boldsymbol{N}$, то на основании принципа Даламбера имеем

$$\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{w}+\boldsymbol{N}=0. \qquad (1)$$

Сила $\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{R}$ (рис. 29) названа Даламбером потерянной силой, так как она уравновешивается силой $\boldsymbol{N}$ и не сообщает точке ускорения; поэтому принцип Даламбера может быть еще формулирован так: в каждый момент движения потерянная сила уравновешивается реакциями связей, т. е.

$$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{N}=0. \qquad (1')$$

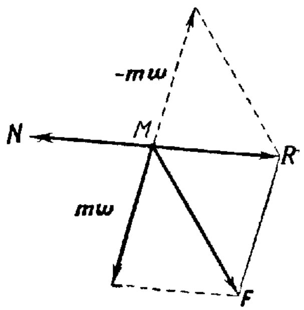


Рис. 29.

2. Принцип Даламбера для системы. Применим теперь принцип Даламбера к произвольной системе n материальных точек. Рассмотрим какую-либо точку системы с номером ν и массой m_ν. Пусть равнодействующая всех действующих на точку активных сил (как внешних, так и внутренних) будет $\boldsymbol{F}_\nu$, а пассивных (реакций связей) $\boldsymbol{N}_\nu$; ускорение точки обозначим через $\boldsymbol{w}_\nu$. Тогда, на основании аксиомы связей, эту точку можно рассматривать как свободную и составить для нее уравнение (1), т. е.

$$\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\boldsymbol{w}_\nu+\boldsymbol{N}_\nu=0, \qquad (2)$$

или, полагая $\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\boldsymbol{w}_\nu=\boldsymbol{R}_\nu$,

$$\boldsymbol{R}_\nu+\boldsymbol{N}_\nu=0. \qquad (2')$$

Уравнения (2) или (2′), составленные для всех точек системы, выражают принцип Даламбера для системы: в любой момент движения действующие на каждую точку системы активные силы и реакции связей могут быть уравновешены добавлением к ним соответствующей силы инерции, или, другими словами, в любой момент движения для каждой точки системы потерянные силы уравновешиваются реакциями связей.

Составив для всех точек системы уравнения (2) или (2′) и сложив их почленно, получим

$$\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu-\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{w}_\nu+\sum_\nu \boldsymbol{N}_\nu=0, \qquad (3)$$

или

$$\sum_\nu \boldsymbol{R}_\nu+\sum_\nu \boldsymbol{N}_\nu=0. \qquad (3')$$

Далее, умножая каждое из уравнений (2) или (2′) векторно на $\boldsymbol{r}_\nu$ и складывая их затем почленно, получим

$$\sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{F}_\nu)-\sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu\times m_\nu\boldsymbol{w}_\nu)+\sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{N}_\nu)=0, \qquad (4)$$

или

$$\sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{R}_\nu)+\sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{N}_\nu)=0. \qquad (4')$$

При этом из свойств внутренних сил следует, что в уравнениях (3) и (4) сохранятся только в н е ш н и е активные силы и реакции.

Уравнения (3) и (3′) или (4) и (4′) показывают, что в любой момент движения действующие на систему внешние активные силы, реакции связей и силы инерции (или потерянные силы и реакции связей) удовлетворяют основным уравнениям статики, т. е. сумма всех этих сил и сумма моментов всех этих сил относительно произвольного центра равны нулю.

Таким образом, принцип Даламбера, как и в случае одной точки, дает возможность составлять уравнения движения системы в форме уравнений равновесия, вводя в рассмотрение силы инерции, которые считаются приложенными к точкам системы.

3. Если механическая система движется относительно инерциальной системы отсчета, то, применяя теоремы об изменении количества движения и кинетического момента, мы будем иметь два векторных уравнения:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}=\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^e \quad \text{и} \quad \frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{F}_\nu^e), \qquad (5)$$

которые связывают действующие на систему внешние силы с динамическими величинами $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{G}$. Эти уравнения, как указывалось в начале § 3, можно часто с успехом использовать для изучения движения системы; однако полностью определить это движение с их помощью можно не всегда. В самом деле, в проекциях на оси координат равенства (5) дают 6 скалярных уравнений и, следовательно, позволяют найти 6 неизвестных (координат, определяющих положение системы, и реакций внешних связей); между тем в общем случае этих неизвестных может быть значительно больше. Но, например, для абсолютно твердого тела положение которого определяется шестью параметрами, равенства (5) дают систему уравнений, позволяющих изучить его движение полностью.

Если уравнения (5) представить в виде

$$\sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}^{e} - \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = 0, \quad \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu} \times \boldsymbol{F}_{\nu}^{e}) - \frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = 0 \tag{6}$$

и посмотреть на них с точки зрения принципа Даламбера, то, сравнивая уравнения (6) с уравнениями (3) и (4), мы убедимся, что величины $-\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}$ и $-\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}$ представляют собою соответственно геометрическую сумму (главный вектор) сил инерции и сумму моментов (главный момент) сил инерции точек движущейся системы, которые в силу принципа Даламбера должны вместе со всеми внешними силами (как активными, так и пассивными), действующими на систему, образовать уравновешенную систему сил. Уравнения (6) являются основными уравнениями кинетостатики; они аналогичны основным уравнениям статики, в которые переходят, если система находится в покое, потому что в этом случае $\boldsymbol{Q} = 0$ и $\boldsymbol{G} = 0$.

Как и в статике, основные уравнения кинетостатики являются для любой механической системы только необходимыми, но не достаточными. Однако для абсолютно твердого тела они будут также и достаточны и, следовательно, как было указано выше, вполне определяют движение (конечно, при заданных начальных условиях); вся задача сводится только к интегрированию этих уравнений.

Необходимо заметить, что производные $\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}$ и $\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}$ в равенствах (5) берутся относительно инерциальной системы отсчета; если же эти уравнения отнести к подвижной системе, то они примут вид

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{Q}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{Q} = \sum_{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu};$$

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{G}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G}' + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} = \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu}' \times \boldsymbol{F}_{\nu}), \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ есть мгновенная угловая скорость, $\boldsymbol{v}'$ — скорость начала подвижной системы, причем производные будут уже локальными.

4. Примеры. 1. Через неподвижный блок перекинута гибкая нерастяжимая нить, на концах которой подвешены грузы весом P и Q (рис. 30, *а*). Найти ускорение грузов, натяжение нити и давление на ось. Массой блока и нити пренебречь.

Предположим, что $P > Q$; тогда система грузов A и B будет двигаться с некоторым ускорением $\boldsymbol{w}$. Поскольку грузы движутся поступательно, их можно рассматривать как материальные точки. Прикладывая к грузам A и B, кроме активных сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, силы инерции, составим, согласно принципу Даламбера, условие равновесия системы, приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно оси блока; сократив на r, имеем (так как момент реакции N равен нулю)

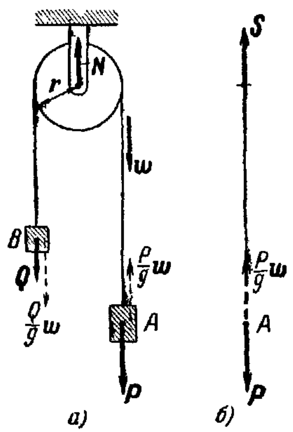


Рис. 30.

$$P - \frac{P}{g} w - Q - \frac{Q}{g} w = 0,$$

откуда получим ускорение

$$w = \frac{P - Q}{P + Q} g.$$

Для определения натяжения S нити мысленно разрежем нить в какой-либо точке и составим условие равновесия оставшейся части (рис. 30, *б*); получим

$$P - \frac{P}{g} w - S = 0,$$

откуда, подставляя w из предыдущей формулы, найдем

$$S = P\left(1 - \frac{w}{g}\right) = \frac{2PQ}{P + Q}.$$

Сила давления на ось при движении грузов, которую обозначим $N_д$, равна, очевидно, $2S$. Следовательно,

$$N_д = \frac{4PQ}{P + Q}.$$

Если грузы были бы неподвижны, то статическое давление на ось равнялось бы $N_{ст} = P + Q$. Легко подсчитать, что

$$N_{ст} - N_д = \frac{(P - Q)^2}{P + Q} > 0.$$

Следовательно, $N_д < N_{ст}$, т. е. при движении грузов давление на ось будет меньше статического, причем величина $N_д$ тем меньше, чем больше разность $P - Q$.

2. Однородный стержень AB длиною l и весом P, укрепленный посредством шарнира в точке A, равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через эту точку (рис. 31); при этом стержень концом B опирается на горизонтальную плоскость и образует угол α с вертикалью. Найти, при какой угловой скорости ω давление стержня на плоскость равно нулю и чему при этом равна реакция в точке A.

Пользуясь принципом Даламбера, присоединим к действующим на стержень внешним силам активной $\boldsymbol{P}$ и реакциям $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$ силы инерции. Так как стержень вращается вокруг оси y равномерно, то каждый его элемент имеет только нормальное ускорение, направленное к оси и равное $x\omega^2$, где x — расстояние элемента от оси y. Следовательно, для каждого элемента сила инерции направлена от оси и равна $dJ = x\omega^2\,dm$, где dm — масса элемента. Направляя вдоль стержня ось $A\xi$, будем иметь $x=\xi\sin\alpha$ и $dm=\frac{P}{gl}d\xi$. Тогда

$$dJ=\frac{P\omega^2}{gl}\xi\sin\alpha\,d\xi.$$

Действующие на стержень внешние силы и силы инерции лежат в одной плоскости и образуют, согласно принципу Даламбера, уравновешенную систему сил. Составляя для них известные уравнения статики и учитывая, что суммы сил инерции и их моментов выразятся соответствующими интегралами, будем иметь:

$$\sum_\nu F_{\nu x}\equiv X_A+\frac{P\omega^2}{gl}\sin\alpha\int_0^l\xi\,d\xi=0,$$

$$\sum_\nu F_{\nu y}\equiv Y_A-P+N=0,$$

$$\sum_\nu \mathrm{mom}_A F_\nu\equiv -P\frac{l}{2}\sin\alpha+Nl\sin\alpha+$$

$$+\frac{P\omega^2}{gl}\sin\alpha\cos\alpha\int_0^l\xi^2\,d\xi=0;$$

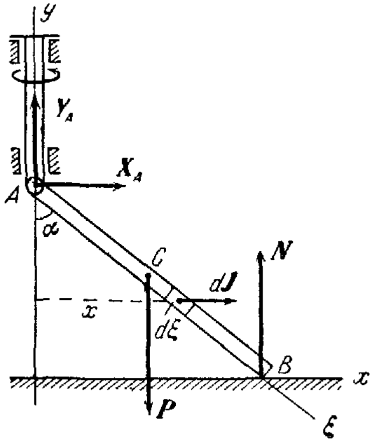


Рис. 31.

последний результат следует из того, что $\mathrm{mom}_A\,dJ=dJ\,\xi\cos\alpha$. Из третьего уравнения при $N=0$ находим

$$\left(-P\frac{l}{2}+\frac{P\omega^2}{g}\frac{l^2}{3}\cos\alpha\right)\sin\alpha=0,$$

откуда

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l\cos\alpha}}. \qquad (а)$$

Из первых двух уравнений при этом значении ω и при $N=0$ получим

$$X_A=-\frac{3}{4}P\,\mathrm{tg}\,\alpha,\quad Y_A=P. \qquad (б)$$

Уравнение (а), по существу, определяет ту угловую скорость, с которой должен вращаться стержень, чтобы составлять с вертикалью данный угол α. Как видно, отклонение стержня от вертикали начинается, лишь когда $\omega>\sqrt{3g/2l}$.

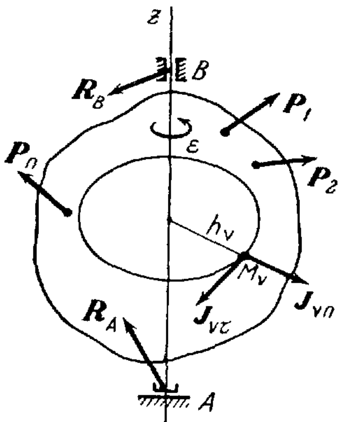


Рис. 32.

3. Составим, пользуясь принципом Даламбера, дифференциальное уравнение движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси AB, которую назовем осью z (рис. 32). Приложим в каждой точке тела с массой m_ν, находящейся на расстоянии h_ν от оси AB, касательную $\boldsymbol{J}_{\nu\tau}$ и нормальную $\boldsymbol{J}_{\nu n}$ силы инерции; численно $J_{\nu\tau}=m_\nu h_\nu\varepsilon$, $J_{\nu n}=m_\nu h_\nu\omega^2$, где ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение тела. Согласно принципу Даламбера эти силы вместе с активными силами $\boldsymbol{P}_k$ и реакциями $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ образуют уравновешенную систему. Составляем уравнение равновесия $\sum\mathrm{mom}_z\boldsymbol{F}_i=0$, в которое не войдут неизвестные реакции $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$. Учитывая, что и $\mathrm{mom}_z\boldsymbol{J}_{\nu n}=0$, будем иметь

$$\sum_k\mathrm{mom}_z\boldsymbol{P}_k+\sum_\nu\mathrm{mom}_z\boldsymbol{J}_{\nu\tau}=0. \qquad (8)$$

Так как $\mathrm{mom}_z\boldsymbol{J}_{\nu\tau}$ и угловое ускорение ε всегда имеют противоположные знаки, то $\mathrm{mom}_z\boldsymbol{J}_{\nu\tau}=-J_{\nu\tau}h_\nu=-m_\nu h_\nu^2\varepsilon$. Далее, обозначим $\sum_k\mathrm{mom}_z\boldsymbol{P}_k=M_z$, где величина M_z называется *вращающим моментом*. Подставляя все эти значения в равенство (8), найдем, что

$$M_z-\left(\sum_\nu m_\nu h_\nu^2\right)\varepsilon=0.$$

Но сумма, стоящая в скобке, представляет собой момент инерции J_z тела относительно оси z; в результате получим

$$J_z\varepsilon=M_z\quad\text{или}\quad J_z\ddot{\varphi}=M_z, \qquad (9)$$

т. е. произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение тела равно вращающему моменту.

Уравнение (9) представляет собой дифференциальное уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Другим путем это уравнение будет получено в § 12. Из уравнения (9) непосредственно видно, что осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении (см. § 2, п. 8).

5. Уравнение Даламбера — Лагранжа. Пользуясь принципом Даламбера, можно придать уравнениям движения форму уравнений равновесия, если к заданным активным силам и реакциям связей присоединить силы инерции.

Это позволяет использовать для решения задач динамики принцип виртуальных перемещений (см. ч. I, гл. V). Пусть мы имеем систему n материальных точек с неосвобождающими идеальными связями. Тогда для каждой точки системы с массой m_ν, согласно принципу Даламбера, имеет место уравнение (2)

$$\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}+\boldsymbol{N}_\nu=0\qquad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (10)$$

Сообщим точкам системы виртуальные перемещения (см. ч. I, § 28) и умножим каждое из уравнений (10) скалярно на виртуальное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ соответствующей точки; сложив полученные выражения почленно, будем иметь

$$\sum_\nu\left(\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}+\boldsymbol{N}_\nu\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu=0.$$

Но для связей идеальных и неосвобождающих $\sum\boldsymbol{N}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu=0$ (см. ч. I, § 30). Следовательно,

$$\sum_\nu\left(\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu=0. \qquad (11)$$

Выражая скалярное произведение, стоящее под знаком суммы в уравнении (11), через проекции сомножителей, получим

$$\sum_{\nu}\left[\left(F_{\nu x}-m_{\nu}\frac{d^2x_{\nu}}{dt^2}\right)\delta x_{\nu}+\left(F_{\nu y}-m_{\nu}\frac{d^2y_{\nu}}{dt^2}\right)\delta y_{\nu}+\right.$$
$$\left.+\left(F_{\nu z}-m_{\nu}\frac{d^2z_{\nu}}{dt^2}\right)\delta z_{\nu}\right]=0, \qquad (11')$$

причем суммирование распространяется на все точки системы.

Уравнение (11) представляет собой соединение принципа Даламбера с принципом виртуальных перемещений и иногда называется уравнением Даламбера — Лагранжа или символическим уравнением динамики. Это уравнение является наиболее общим уравнением механики и, можно сказать, включает в себя всю механику; из него можно получить как следствие общие теоремы динамики и уравнения движения механической системы.

§ 6. Общие теоремы динамики, выводимые из уравнения Даламбера — Лагранжа

1. Предварительные замечания. Общие теоремы динамики, изложенные в § 3, устанавливают зависимости между динамическими величинами, характеризующими движение системы, и действующими на систему силами, как активными, так и реакциями связей, причем связи могут быть любыми. Эти теоремы можно получить и из уравнения Даламбера — Лагранжа, если, отбросив связи, заменить их соответствующими реакциями и рассматривать эти реакции как активные силы, а все точки системы считать при этом свободными, т. е. имеющими любые виртуальные перемещения.

Пользуясь указанными теоремами, можно, как мы видели, изучать движение системы и определять реакции связей. При этом, если нас интересует только изучение движения, то реакции связей из соответствующих уравнений нужно тем или иным способом исключать.

Уравнение Даламбера — Лагранжа позволяет получить другие выражения общих теорем динамики, не содержащие реакций связей и дающие непосредственно зависимость между динамическими величинами, характеризующими движение системы, и действующими на нее *активными* силами. Однако при этом на связи системы должны быть наложены некоторые ограничения.

2. Частный случай теоремы об изменении количества движения системы. Пусть на систему наложены *идеальные* стационарные связи, обладающими тем свойством, что они допускают *поступательное* перемещение системы как абсолютно твердого тела параллельно некоторой неподвижной оси x. Тогда к виртуальным перемещениям

системы будут принадлежать и такие, для которых перемещения всех точек системы одинаковы, т. е.

$$\delta \boldsymbol{r}_{\nu}=\boldsymbol{x}^0\delta s \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (1)$$

где δs имеет одно и то же значение для всех точек системы, а $\boldsymbol{x}^0=\mathrm{const}$. Уравнение (11) из § 5 для такого виртуального перемещения системы примет вид

$$\sum_{\nu}\left(\boldsymbol{F}_{\nu}-m_{\nu}\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\nu}}{dt^2}\right)\cdot\boldsymbol{x}^0\delta s=0.$$

Отсюда, сокращая на δs и учитывая, что

$$\sum_{\nu}m_{\nu}\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\nu}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\sum_{\nu}m_{\nu}\boldsymbol{v}_{\nu}=\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt},$$

получим

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}\cdot\boldsymbol{x}^0=\sum\boldsymbol{F}_{\nu}^{(a,\ e)}\cdot\boldsymbol{x}^0. \qquad (2)$$

Заметим, что в правую часть равенства (2) входит сумма активных сил, и притом только внешних, ибо сумма всех внутренних сил, как попарно равных и противоположных, дает нуль; чтобы подчеркнуть это обстоятельство, здесь и введен символ «$(a,\ e)$».

Учитывая, что $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}^0=Q_x$ и $\boldsymbol{F}_{\nu}\cdot\boldsymbol{x}^0=F_{\nu x}$, где Q_x и $F_{\nu x}$ суть проекции векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{F}_{\nu}$ на ось x, будем окончательно иметь

$$\frac{dQ_x}{dt}=\sum_{\nu}F_{\nu x}^{(a,\ e)}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) дает следующее выражение теоремы об изменении количества движения системы: *если на систему наложены идеальные стационарные связи, допускающие в любой момент времени поступательное перемещение системы параллельно некоторой неподвижной оси, то производная по времени от проекции количества движения системы на эту ось равна сумме проекций на ту же ось всех действующих на систему внешних активных сил.*

Выше мы имели

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{\nu}m_{\nu}\boldsymbol{v}_{\nu}=M\boldsymbol{v}_C,$$

где $\boldsymbol{v}_C$ есть скорость центра масс, а M — масса всей системы. Отсюда

$$Q_x=Mv_{Cx},$$

где v_{Cx} есть проекция скорости центра масс системы на ось x, параллельно которой возможно поступательное перемещение системы. Подставляя это значение Q_x в равенство (3), получим

$$M\frac{dv_{Cx}}{dt}=\sum_{\nu}F_{\nu x}^{(a,\ e)}. \qquad (4)$$

Это равенство выражает теорему о движении центра масс системы в форме, аналогичной той, которую уравнение (3) дает для теоремы об изменении количества движения.

3. Частный случай теоремы об изменении кинетического момента системы. Пусть наложенные на систему идеальные стационарные связи допускают поворот системы как абсолютно твердого тела вокруг некоторой неподвижной оси x (рис. 33). Тогда к числу виртуальных перемещений любой точки с массой m_ν будет принадлежать перемещение

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta\varphi \boldsymbol{x}^0 \times \boldsymbol{r}_\nu, \tag{5}$$

где $\delta\varphi$ есть элементарный угол поворота вокруг оси x, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиус-вектор, проведенный из какого-нибудь центра O, лежащего на этой оси. Подставляя выражение (5) для $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ в уравнение Даламбера — Лагранжа [формула (11) § 5], получим

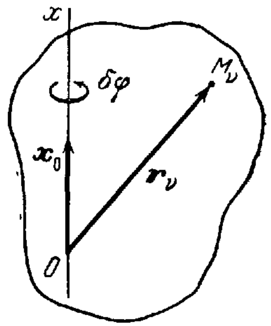


Рис. 33.

$$\sum_\nu \left[\left(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right) \cdot (\delta\varphi \boldsymbol{x}^0 \times \boldsymbol{r}_\nu)\right] = 0,$$

или, переставляя циклические множители в смешанном произведении и сокращая на $\delta\varphi$,

$$\boldsymbol{x}^0 \cdot \sum_\nu \left[\boldsymbol{r}_\nu \times \left(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right)\right] = 0.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\boldsymbol{x}^0 \cdot \sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right) = \boldsymbol{x}^0 \cdot \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu). \tag{6}$$

Здесь

$$\sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt} \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \frac{d\boldsymbol{G}_O}{dt},$$

где $\boldsymbol{G}_O$ есть кинетический момент системы относительно центра O.

Заметим еще, что в правой части равенства (6) сохранятся только моменты внешних активных сил, поскольку сумма моментов внутренних сил, как попарно равных и противоположных, обращается в нуль; таким образом, будем иметь

$$\boldsymbol{x}^0 \cdot \frac{d\boldsymbol{G}_O}{dt} = \sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^{(a,\,e)}\right) \cdot \boldsymbol{x}^0.$$

Но

$$\boldsymbol{G}_O \cdot \boldsymbol{x}_0 = G_x, \quad \text{а} \quad (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu) \cdot \boldsymbol{x}^0 = (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu)_x = \operatorname{mom}_x \boldsymbol{F}_\nu.$$

В результате окончательно получаем

$$\frac{dG_x}{dt} = \sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^{(a,\,e)}\right)_x \quad \text{или} \quad \frac{dG_x}{dt} = \sum_\nu \operatorname{mom}_x \boldsymbol{F}_\nu^{(a,\,e)}. \tag{7}$$

Уравнение (7) дает следующее выражение теоремы об изменении кинетического момента системы: *если на систему наложены идеальные стационарные связи, допускающие в каждый момент времени вращательное перемещение системы вокруг некоторой неподвижной оси, то производная по времени от кинетического момента системы относительно этой оси равна сумме моментов относительно той же оси всех действующих на систему внешних активных сил.*

4. Частный случай теоремы об изменении кинетической энергии системы. Пусть на систему наложены идеальные стационарные связи. Как известно (см. ч. 1, § 28), при стационарных связях истинное перемещение системы принадлежит к числу виртуальных. Тогда, принимая за виртуальные перемещения точек системы их истинные перемещения, т. е. полагая

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = d\boldsymbol{r}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

мы получим уравнение Даламбера — Лагранжа в виде

$$\sum_\nu \left(\boldsymbol{F}_\nu^{(a)} - m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right) \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = 0.$$

Но

$$\sum_\nu m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = d\,\frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \left(\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}\right)^2 = dT,$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \left(\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}\right)^2,$$

есть кинетическая энергия системы. Следовательно,

$$dT = \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^{(a)} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu. \tag{8}$$

Равенство (8) дает следующее выражение для теоремы об изменении кинетической энергии системы: *если на систему наложены идеальные стационарные связи, то дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ действующих на систему внешних и внутренних активных сил.*

Если же система является неизменяемой, то в правой части уравнения (8) останется элементарная работа только внешних активных сил.

Примечание. При решении примеров, рассмотренных в § 3, п. 5, мы, по существу, пользовались уравнением (8), так как в этих примерах наложенные на систему связи были идеальными и стационарными.

В частности, первый из рассмотренных в п. 5 примеров показывает, что шероховатая поверхность, вдоль которой тело катится без скольжения, является идеальной связью, если мы пренебрегаем деформациями поверхности и катящегося тела, так как элементарная работа реакций поверхности (нормальной и силы трения) равна нулю. Но если тело скользит вдоль шероховатой поверхности, то такая связь не является идеальной, поскольку в этом случае работа силы трения не равна нулю.

§ 7. Уравнения движения механической системы в декартовых координатах

1. Уравнения Лагранжа 1-го рода. Рассмотрим механическую систему, находящуюся под действием активных сил (как внутренних, так и внешних) и подчиненную конечным и дифференциальным (неинтегрируемым) связям. Условимся в дальнейшем число точек системы обозначать через N, а декартовы координаты этих точек — одной буквой x с индексами 1, 2, ..., $3N$ (см. § 1, п. 3). Соответственно проекции действующих на точки системы активных сил будем обозначать одной буквой X, а проекции реакций связей — буквой R с теми же индексами.

Таким образом, масса точки системы с индексом ν, ее координаты и проекции равнодействующих приложенных к этой точке активных сил и реакций связей будут соответственно

$$m_{3\nu-2}=m_{3\nu-1}=m_{3\nu}; \quad x_{3\nu-2},\ x_{3\nu-1},\ x_{3\nu};$$
$$X_{3\nu-2},\ X_{3\nu-1},\ X_{3\nu}; \quad R_{3\nu-2},\ R_{3\nu-1},\ R_{3\nu}.$$

При этих обозначениях получаем следующие дифференциальные уравнения движения точек системы в проекциях на оси декартовых координат:

$$m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}=X_\nu+R_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ 3N). \tag{1}$$

Эти уравнения содержат $6N$ неизвестных: $3N$ декартовых координат x_ν и $3N$ проекций реакций R_ν, которые должны быть определены как функции времени.

Пусть на точки системы наложены: 1) связи конечные, выражаемые уравнениями вида

$$f_\varkappa(x;\ t)=0 \qquad (\varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ k); \tag{2}$$

2) связи дифференциальные, линейно зависящие от скоростей и выражаемые уравнениями вида

$$\sum_{\nu=1}^{3N} a_{\rho\nu}\dot{x}_\nu + a_\rho = 0 \qquad (\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ r), \tag{3}$$

причем

$$a_{\rho\nu},\ a_\rho \,|\, x;\ t.$$

Таким образом, мы имеем неголономную систему, на которую наложено k конечных и r дифференциальных неинтегрируемых связей, причем все связи явно зависят от времени.

Дифференциальные уравнения движения (1) вместе с уравнениями связей (2) и (3) дают систему $3N+k+r$ уравнений для определения $6N$ неизвестных x_ν, R_ν. Следовательно, число неизвестных будет на $3N-(k+r)$, т. е. на число степеней свободы системы, больше числа имеющихся уравнений. Отсюда видно, что задания связей их уравнениями вида (2) и (3) недостаточно для того, чтобы сделать соответствующую задачу динамики определенной. Необходимо, очевидно, наложить на связи системы дополнительные ограничения.

Допустим, что все связи являются идеальными. Тогда, как мы увидим, задача будет определенной. При идеальных связях воспользуемся для изучения движения системы уравнениями (11′) из § 5, в которые реакции связей не входят. При наших обозначениях эти уравнения Даламбера — Лагранжа имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{3N}\left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)\delta x_\nu = 0. \tag{4}$$

Вариации координат δx_ν ($\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ 3N$) связаны между собой условиями, налагаемыми на них уравнениями связей (2) и (3); эти условия, согласно п. 2 § 1, будут

$$\sum_{\nu=1}^{3N}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu = 0 \qquad (\varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ k) \tag{5}$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{3N} a_{\rho\nu}\delta x_\nu = 0 \qquad (\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{6}$$

Таким образом, $3N$ вариаций δx_ν связаны $k+r$ условиями (5) и (6), следовательно, независимых вариаций будет $3N-(k+r)$, а остальные $(k+r)$ будут зависимыми. Определив из уравнений (5) и (6) $k+r$ зависимых вариаций через $3N-(k+r)$ независимых (которые можем выбрать произвольно), подставим выражения зависимых вариаций в уравнение (4); после этого оно будет содержать только независимые вариации. Ввиду произвольности этих вариаций множители при них должны быть равны нулю, что дает $3N-(k+r)$ уравнений; присоединяя к этим уравнениям $k+r$ уравнений связей (1) и (2), получим систему $3N$ уравнений, определяющих $3N$ координат точек системы как функции времени.

Но исключение зависимых вариаций удобнее выполнить, пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, подобно тому как это делается в аналитической статике. Для этого умножим каждое из k уравнений (5) соответственно на $\lambda_\varkappa$ ($\varkappa=1, 2, \ldots, k$) и каждое из r уравнений (6) на μ_ρ ($\rho=1, 2, \ldots, r$) и сложим полученные равенства почленно с уравнением (4); получим одно уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{3N}\left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} + \sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_\varkappa \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho a_{\rho\nu}\right)\delta x_\nu = 0. \qquad (7)$$

Пользуясь неопределенностью лагранжевых множителей λ и μ, число которых равно $k+r$, выберем их так, чтобы множители при $k+r$ зависимых вариациях обратились в нуль; тогда множители при оставшихся $3N-(k+r)$ независимых вариациях должны быть также равны нулю; таким образом, получаем $3N$ уравнений

$$m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = X_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_\varkappa \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho a_{\rho\nu} \qquad (\nu=1, 2, \ldots, 3N). \qquad (8)$$

Присоединяя к этим уравнениям $k+r$ уравнений связей

$$f_\varkappa(x;\ t)=0 \qquad (\varkappa=1, 2, \ldots, k) \qquad (2')$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{3N} a_{\rho\nu}\dot{x}_\nu + a_\rho = 0 \qquad (\rho=1, 2, \ldots, r), \qquad (3')$$

получим полную систему $3N+k+r$ уравнений для определения $3N$ координат точек системы, а также $k+r$ лагранжевых множителей λ и μ. Проинтегрировав эту систему при заданных начальных условиях, мы найдем x, λ, μ как функции времени t. Уравнения $x_\nu = x_\nu(t)$ определяют закон движения системы. С помощью же множителей $\lambda_\varkappa(t)$ и $\mu_\rho(t)$ найдутся динамические реакции связей. В самом деле, сравнивая уравнения (8) с дифференциальными уравнениями движения (1), мы видим, что

$$R_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_\varkappa \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho a_\rho \qquad (\nu=1, 2, \ldots, 3N). \qquad (9)$$

Таким образом, механическое значение множителей $\lambda_\varkappa$ и μ_ρ такое же, как и в статике, т. е. они пропорциональны реакциям связей.

Равенства (9) определяют реакции связей, заданных уравнениями (2) и (3), если эти связи являются идеальными. Отметим, что справедливо и обратное утверждение, т. е. связи, заданные уравнениями (2) и (3), будут идеальными, если их реакции можно представить в виде (9).

Итак, уравнения (8) вместе с уравнениями связей (2) и (3) определяют движение любой неголономной системы с идеальными связями при условии, что неголономные связи являются линейными функциями скоростей [1]). Эти уравнения движения системы в декартовых координатах принято называть *уравнениями Лагранжа 1-го рода.*

Поскольку интегрирование уравнений (8) является задачей весьма сложной, то обычно ими пользуются лишь для определения реакций связей, а закон движения системы находят с помощью других уравнений, которые будут получены ниже.

2. Интеграл энергии. Уравнения Лагранжа 1-го рода (8) дают интеграл энергии, если: 1) силы, действующие на систему, имеют потенциал, т. е. если существует функция $U(x_1, x_2, \ldots, x_{3N})$ такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x_\nu} = X_\nu \qquad (\nu=1, 2, \ldots, 3N), \qquad (10)$$

и 2) связи идеальны, причем конечные связи (2) склерономны, а дифференциальные связи (3) однородны относительно скоростей, т. е.

$$\frac{\partial f_\varkappa}{\partial t} = 0 \qquad (\varkappa=1, 2, \ldots, k);\ a_\rho = 0 \qquad (\rho=1, 2, \ldots, r). \qquad (11)$$

Умножая каждое из уравнений системы (8) соответственно на dx_ν и складывая, получим

$$\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}\,dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu\,dx_\nu + \sum_{\nu=1}^{3N}\sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_\varkappa \frac{df_\varkappa}{dx_\nu}\,dx_\nu + \sum_{\nu=1}^{3N}\sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho a_{\rho\nu}\,dx_\nu. \qquad (12)$$

Преобразуем уравнение (12). Для левой части имеем

$$\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}\,dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\,d\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) = d\sum_{\nu=1}^{3N}\frac{1}{2}m_\nu\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2 = dT; \qquad (13)$$

далее, на основании равенства (10),

$$\sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu\,dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3N}\frac{\partial U}{\partial x_\nu}\,dx_\nu = dU. \qquad (14)$$

[1]) На практике уравнениями, которые мы получаем для идеальных связей, можно пользоваться и в случае связей, для которых работа сил трения не равна нулю. Эти силы можно рассматривать как неизвестные активные силы, связанные с нормальными реакциями некоторыми эмпирическими зависимостями (например, в виде законов трения скольжения или качения).

Дифференцируя уравнения голономных связей (2), получим

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial t} dt = 0 \qquad (\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu} dx_\nu = -\frac{\partial f_\varkappa}{\partial t} dt; \tag{15}$$

кроме того, из уравнений неголономных связей (3), которые можно представить в виде

$$\sum_{\nu=1}^{3N} a_{\rho\nu} dx_\nu + a_\rho dt = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

имеем

$$\sum_{\nu=1}^{3N} a_{\rho\nu} dx_\nu = -a_\rho dt. \tag{16}$$

Принимая во внимание равенства (13), (14), (15) и (16), преобразуем уравнение (12) к виду

$$dT = dU - \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa \frac{\partial f_\varkappa}{\partial t} dt - \sum_{\rho=1}^{r} \mu_\rho a_\rho dt. \tag{17}$$

Если имеют место условия (11), то второй и третий члены правой части уравнения (17) обращаются в нуль, и мы имеем

$$dT = dU,$$

откуда, интегрируя, получим интеграл энергии

$$T = U + h. \tag{18}$$

Итак, уравнения Лагранжа 1-го рода дают интеграл энергии, если: 1) активные силы, действующие на систему, имеют потенциал; 2) геометрические (конечные) связи системы идеальны и склерономны, т. е. от времени явно не зависят; 3) дифференциальные (неголономные) связи системы идеальны и являются линейными и однородными функциями скоростей. Очевидно, что уравнения Лагранжа 1-го рода дадут интеграл энергии и в случае, когда неголономные связи являются склерономными, т. е. когда $a_{\rho\nu}$ не зависят явно от времени и $a_\rho = 0$, но это требование не является необходимым; необходимо лишь, чтобы было $a_\rho = 0$, т. е. чтобы эти связи были однородны относительно скоростей.

§ 8. Уравнения движения системы в обобщенных координатах

1. Уравнения движения голономной системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа 2-го рода). Рассмотрим движение по отношению к основной инерциальной системе отсчета механической системы, состоящей из N материальных точек. При этом положения точек системы определяются $3N$ декартовыми координатами x_ν. Пусть на систему наложены *только* голономные связи вида

$$f_\varkappa(x;\ t) = 0 \qquad (\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Тогда число независимых координат будет равно

$$n = 3N - k$$

и положение системы можно однозначно определить n соответствующим образом выбранными независимыми между собой параметрами любой размерности $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$, которые называют *обобщенными* (или лагранжевыми) *координатами* системы. Заметим, что параметры q_i могут быть отнесены и к любой подвижной системе отсчета, движение которой по отношению к основной системе известно.

Поскольку параметры q_i определяют положение системы однозначно, то все декартовы координаты x_ν могут быть выражены через q_i равенствами вида

$$x_\nu = \varphi_\nu(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ t). \tag{1}$$

Уравнениями (1), по существу, учитываются все наложенные на систему голономные связи. Если функции φ_ν явно не содержат времени, механическую систему называют склерономной.

Так как

$$\delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N),$$

то, подставляя эти выражения вариаций координат в уравнение Даламбера — Лагранжа, получим

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = 0,$$

или, раскрывая скобки,

$$\sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \tag{2}$$

Первая из сумм в левой части равенства (2) есть элементарная работа δA всех действующих на систему сил, так как

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \delta x_\nu = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Ясно, что

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{3N} \sum_{i=1}^{n} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \delta q_i \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i, \tag{3}$$

где величина

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \tag{4}$$

называется *обобщенной силой*, отнесенной к координате q_i.

Преобразуем теперь второй член левой части уравнения (2). Имеем

$$\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{\nu=1}^{3N} \sum_{i=1}^{n} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \tag{5}$$

Сделаем теперь предварительно несколько замечаний относительно дифференцирования координат. Очевидно, что

$$\frac{dx_\nu}{dt} \equiv \dot{x}_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}.$$

Взяв от обеих частей частную производную по $\dot{q}_i$, получим

$$\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}. \tag{6}$$

Далее,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_i \, \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \right).$$

Выражение в скобках есть, очевидно, $\frac{dx_\nu}{dt} \equiv \dot{x}_\nu$; следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_i}. \tag{7}$$

На основании равенств (6) и (7) преобразуем двойную сумму в правой части уравнения (5); имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \right) - \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \right) \right\} \delta q_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_i} \right\} \delta q_i. \tag{7'}$$

Введем теперь выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu^2; \tag{8}$$

тогда, так как $x \mid q,\ t$, то $\dot{x} \mid q,\ \dot{q},\ t$ и

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_i}; \qquad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_i}.$$

Следовательно, выражение для двойной суммы в уравнении (7′) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i.$$

Возвращаясь к равенству (2), получаем уравнение Даламбера — Лагранжа в обобщенных координатах в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ Q_i - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \right\} \delta q_i = 0. \tag{9}$$

В этом уравнении все вариации обобщенных координат δq_i произвольны, а потому, полагая все, кроме одной, равными нулю, получим, что выражение в фигурной скобке при этой вариации равно нулю. Рассуждая так же по отношению к оставшимся теперь $n-1$ слагаемым, найдем, что выражение в фигурной скобке и при следующей вариации равно нулю, и т. д. Таким образом, получим следующую систему n уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

Эта система есть система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q_1, $q_2, \ldots, q_n$ (см. п. 2). Интегрируя ее, находим координаты системы q как функции времени и $2n$ произвольных постоянных, которые определяются обычным способом по начальным условиям. Следовательно, система уравнений (10) вполне определяет движение. Уравнения (10) называют *уравнениями Лагранжа 2-го рода*.

Важное преимущество уравнений (10) по сравнению с уравнениями движения в декартовых координатах состоит в том, что число этих уравнений равно числу степеней свободы системы и от числа частиц, образующих систему, не зависит; кроме того, уравнения (10) не содержат наперед неизвестных реакций связей. Поэтому уравнениями Лагранжа 2-го рода широко пользуются для изучения движения голономных систем.

2. Выражение кинетической энергии в обобщенных координатах. Кинетическая энергия системы в декартовых координатах имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu^2. \tag{11}$$

Для преобразования этого выражения к обобщенным координатам подставим в равенство (11) выражения производных от декартовых координат по времени. Принимая во внимание зависимости (1), получим

$$\dot{x}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3N).$$

При этих значениях $\dot{x}_\nu$ равенство (11) дает

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2,$$

или, возводя в квадрат и меняя порядок суммирования,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\dot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2. \tag{12}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} = a_{ij};\\ &\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial t} = b_i; \quad \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2 = c, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$. Тогда

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} b_i\dot{q}_i + \frac{1}{2}c = T_2 + T_1 + T_0, \tag{14}$$

причем вообще

$$a,\ b,\ c \,|\, q_1, q_2, \ldots, q_n;\ t,$$

и T_2, T_1 и T_0 соответственно будут функциями второй, первой и нулевой степени от скоростей. Следует заметить, что в выражении (14) коэффициенты a, b, c могут явно от времени не зависеть.

Таким образом, в общем случае кинетическая энергия системы представляет собой функцию второй степени от обобщенных скоростей $\dot{q}$. Если система склерономна (связи явно от времени не зависят), то в правые части равенств (1) время явно не войдет и

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial t} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3N).$$

Тогда

$$b_i = 0, \quad c = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и выражение кинетической энергии в этом случае приобретает вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{15}$$

где a_{ij} будут функциями только координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Таким образом, в случае склерономной системы кинетическая энергия есть однородная функция второй степени от обобщенных скоростей, или, иначе, квадратичная форма от этих скоростей.

Из равенств (14) или (15) видно, что левые части уравнений (10) представляют собой некоторые функции от q_i, $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$, и, следовательно, уравнения Лагранжа 2-го рода действительно являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q_i. Явный вид этих уравнений будет получен в п. 7.

Механическую систему с n степенями свободы, положение которой определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, можно, следуя идеям Г. Герца, рассматривать как одну точку в пространстве n измерений.

Тогда уравнения

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \ \ldots, \ q_n = q_n(t)$$

представляют собой закон движения этой «изображающей» точки или, если на время t смотреть как на параметр, — уравнение траектории этой точки в параметрической форме; эта траектория будет, очевидно, кривой в пространстве n измерений, и ее можно назвать траекторией системы. Каждая точка этой траектории соответствует конфигурации системы в данный момент времени, определяемой совокупностью значений координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Если приписать «изображающей» точке массу $M = \sum\limits_{\nu=1}^{3N} m_\nu$, т. е. массу, равную массе всей системы, то выражение кинетической энергии (15) можно преобразовать следующим образом. Согласно равенствам (13)

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} = M \sum_{\nu=1}^{3N} \frac{m_\nu}{M} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j}.$$

Тогда, полагая

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{m_\nu}{M} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} = a'_{ij}; \qquad \sum_{i,\, j=1}^{n} a'_{ij}\, dq_i\, dq_j = ds^2,$$

получим

$$T = \frac{1}{2} M \sum_{i,\, j=1}^{n} a'_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} M \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{15'}$$

Выражение

$$ds^2 = \sum_{i,\, j=1}^{n} a'_{ij}\, dq_i\, dq_j$$

представляет собой фундаментальную метрическую форму, определяющую метрику рассматриваемого n-мерного пространства; ds является элементом дуги «траектории системы», т. е. траектории точки, изображающей систему в n-мерном пространстве.

3. Обобщенные силы. Из равенства (3) (см. п. 1) следует, что выражение элементарной работы действующих на систему активных сил имеет вид

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n. \tag{16}$$

По аналогии с выражением элементарной работы силы, действующей на точку с координатами x_1, x_2, x_3,

$$\delta A = X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 + X_3 \delta x_3$$

величины Q_i и называют обобщенными силами. Из равенства (16) видно, что обобщенные силы можно определить как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении элементарной работы действующих на систему сил.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты и определяется соотношением

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}.$$

Например, если q — угол, то Q имеет размерность момента силы.

Величины Q_i могут вычисляться по формуле (4). Однако практически часто удобнее пользоваться другим приемом. Так как все δq между собой независимы, то для определения Q_i можно сообщить системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta q_i \neq 0$, а все остальные δq равны нулю. Подсчитав работу δA_i всех сил на этом перемещении, мы, согласно равенству (16), будем иметь

$$\delta A_i = Q_i \delta q_i. \tag{17}$$

Следовательно, коэффициент при δq_i в выражении (17) и дает искомую обобщенную силу Q_i.

Пример. Пусть тело совершает плоскопараллельное движение параллельно плоскости Oxy под действием сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Примем за обобщенные координаты декартовы координаты x_C и y_C центра масс тела и угол поворота φ вокруг оси Cz', перпендикулярной к плоскости Oxy и проходящей через центр масс ($q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \varphi$). Тогда, сообщая телу виртуальное перемещение, при котором координата x_C получает приращение δx_C, найдем, что на этом перемещении элементарная работа

$$\delta A_1 = \left(\sum_\nu F_{\nu x}\right) \delta x_C \quad \text{и} \quad Q_1 = \sum_\nu F_{\nu x}.$$

Аналогично найдем, что $Q_2 = \sum\limits_\nu F_{\nu y}$. Сообщая теперь виртуальное перемещение, при котором тело совершает поворот вокруг оси Cz' на угол $\delta\varphi$, получим

$$\delta A_3 = \left(\sum_\nu \mathrm{mom}_{z'} F_\nu\right) \delta\varphi \quad \text{и} \quad Q_3 = \sum_\nu \mathrm{mom}_{z'} F_\nu.$$

Случай потенциальных сил. Если все действующие на механическую систему активные силы потенциальны, т. е. для них существует потенциальная функция $U(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}; t)$, то

$$X_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3N).$$

Учитывая, что $x_\nu = \varphi_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n; t)$, мы можем представить U в виде $U(q_1, q_2, \ldots, q_n; t)$. Тогда по формуле (4) получим

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i},$$

или

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \tag{18}$$

т. е. обобщенная сила в этом случае равна частной производной от силовой функции по соответствующей обобщенной координате.

4. Уравнения Лагранжа для системы, находящейся под действием потенциальных сил. В этом случае уравнения (10), если заменить в них Q_i значениями (18), примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Учитывая, что $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$, и, следовательно, $\dfrac{\partial U}{\partial \dot q_i} = 0$, можно уравнения (19) представить в иной форме, а именно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = 0.$$

Полагая здесь

$$T + U = L(q, \dot q, t), \tag{20}$$

окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Уравнения (21) являются уравнениями Лагранжа для голономной системы, находящейся под действием потенциальных сил. Функция $T = T + U = T - V$, представляющая разность между кинетической и потенциальной энергиями системы, называется функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом (по Гельмгольцу). Эта разность, как и кинетическая энергия T, является вообще функцией второй степени от скоростей, т. е.

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \tag{22}$$

где L_2 и L_1 являются соответственно функциями второй и первой степени от скоростей $\dot q_i$, а L_0 зависит только от координат q_i.

Из уравнений (21) видно, что движение системы вполне определяется заданием для нее некоторой функции $L(q, \dot q, t)$, которая вообще может и не определяться равенством (20). Если функция L определяется равенством (20), где $U = U(q, t)$, т. е. имеет вид (22), то систему будем называть *динамической*. Если же L будет произвольной функцией от скоростей $\dot q$, то систему называют *лагранжевой системой*.

5. Интеграл энергии. Уравнения Лагранжа дают первый интеграл, когда система находится под действием потенциальных сил и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Если действующие силы потенциальны, уравнения Лагранжа имеют вид (21). Умножим каждое из этих уравнений на $\dot q_i$ и сложим их. Получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i - \frac{dL}{dq_i}\dot q_i\right\} = 0.$$

Но

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i;$$

поэтому предыдущее равенство можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i\right) = 0. \tag{23}$$

Пусть L от времени явно не зависит, т. е. $L = L(q, \dot q)$. Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i = \frac{dL}{dt}$$

и равенство (23) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) - L\right\} = 0. \tag{24}$$

Отсюда имеем интеграл

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) - L = \text{const}. \tag{25}$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи.

1) Произвольная динамическая система. В этом случае

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \tag{26}$$

где L_2 и L_1 являются, как было выше указано, соответственно функциями второй и первой степени относительно скоростей $\dot q_i$, а L_0 зависит лишь от одних координат q_i. По известной теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i = \sum_i \frac{\partial L_2}{\partial \dot q_i}\dot q_i + \sum_i \frac{\partial L_1}{\partial \dot q_i}\dot q_i + \sum_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot q_i}\dot q_i = 2L_2 + L_1, \tag{27}$$

вследствие чего полученный интеграл уравнений движения сразу упрощается, а именно, подставляя в равенство (25) величины (26) и (27), получим

$$2L_2+L_1-(L_2+L_1+L_0)=\text{const},$$

или

$$L_2-L_0=\text{const}. \tag{28}$$

Полученное соотношение называется *обобщенным интегралом энергии* для динамической системы. Этот результат можно представить в ином виде. В рассматриваемом случае имеем

$$L=T+U.$$

Разлагая T на части второй, первой и нулевой степени относительно скоростей, т. е. полагая, согласно равенству (14), $T=T_2+T_1+T_0$, найдем, что

$$L_2=T_2,\quad L_1=T_1,\quad L_0=T_0+U.$$

Тогда интеграл (28) принимает вид

$$T_2-T_0-U=\text{const}. \tag{29}$$

Этот обобщенный интеграл энергии называют также *интегралом Якоби*, который впервые нашел его на примере относительного движения.

Итак, если система голономна, а действующие силы потенциальны, причем потенциальная функция явно не зависит от времени, и если кинетическая энергия системы также от времени явно не зависит (но система не обязательно склерономна), то для такой системы имеет место обобщенный интеграл энергии (29). Заметим, что соотношение (29) нельзя назвать физическим интегралом энергии, так как, хотя его левая часть и имеет размерность энергии, она не представляет полной энергии системы, поскольку разность T_2-T_0 не есть кинетическая энергия системы. При этом величина T_1, являющаяся частью кинетической энергии системы и содержащая члены, линейно зависящие от скоростей, в интеграл (29) вообще не входит. Такие, не входящие в выражение кинетической энергии T члены (когда T явно от времени не зависит) называют *гироскопическими членами*.

Примечание. Пусть действующие силы потенциальны и $T=T_2+T_1+T_0$, причем T не зависит явно от времени. Тогда уравнениям (10), учитывая, что $T_0=T_0(q)$, можно придать вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T_2}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial T_0}{\partial q_i}+\tilde Q_i, \tag{30}$$

где

$$\tilde Q_i=-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial q_i}\right]. \tag{31}$$

Величины $\frac{\partial T_0}{\partial q_i}$ и $\tilde Q_i$ можно считать некоторыми обобщенными силами инерции, наличие которых позволяет рассматривать систему с кинетической энергией T_2 как склерономиую. Первые из этих сил, зависящие только от координат q, потенциальны и имеют силовую функцию T_0, а вторые, т. е. $\tilde Q_i$, зависят линейно от скоростей $\dot q$ и обладают тем свойством, что сумма их работ равна нулю, т. е.

$$\sum_i \tilde Q_i\, dq_i=0. \tag{32}$$

В последнем легко убедиться, если учесть, что $T_1=\sum b_i\dot q_i$ и

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot q_i}\right)=\sum_j \frac{\partial b_i}{\partial q_j}\dot q_j,\quad \frac{\partial T_1}{\partial q_i}=\sum_j \frac{\partial b_j}{\partial q_i}\dot q_j.$$

Силы $\tilde Q_i$, зависящие от скоростей, сумма работ которых на истинных перемещениях системы равна нулю, носят название *гироскопических сил* (по Томсону и Тэту). В силу свойства (32) они и не входят в обобщенный интеграл энергии (29). Примером таких сил служат кориолисовы силы инерции (см. п. 6, пример 4).

2) Склерономная система. Для склерономной системы кинетическая энергия является однородной квадратичной функцией от скорости, имеющей вид (15). Следовательно, в этом случае $T=T_2$, а $T_1=T_0=0$ и интеграл (29) переходит в обычный физический интеграл энергии

$$T_2-U=\text{const}. \tag{33}$$

Следовательно, для голономной системы имеет место интеграл энергии, если система склерономна, а действующие силы потенциальны, причем потенциальная функция явно от времени не зависит.

3) Лагранжева система. Пусть теперь $L(q,\ \dot q;\ t)$ есть произвольная функция скоростей. Полагая, что $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, и повторяя в точности приведенные выше рассуждения, придем к равенству (24). Введем функцию

$$H^*=-L+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i, \tag{34}$$

причем, очевидно, $H^*=H^*(q,\ \dot q;\ t)$. Тогда будем иметь

$$\frac{dH^*}{dt}=0\quad \text{и}\quad H^*=\text{const}. \tag{35}$$

Это соотношение также можно назвать *обобщенным интегралом энергии* для лагранжевой системы; для существования этого интеграла необходимо, чтобы было $\frac{\partial L}{\partial t}=0$.

6. Примеры. При решении задач обычно пользуются уравнениями Лагранжа в виде (10). Для их составления, установив число степеней свободы системы, выбирают обобщенные координаты q и выражают кинетическую энергию системы T через эти координаты и обобщенные скорости $\dot{q}$ в виде (14) или (15). Имея выражение $T(q, \dot{q})$, легко составить левые части уравнений (10). Входящие в правые части обобщенные силы обычно вычисляют так, как это показано в п. 3. Рассмотрим примеры.

1. Составим, пользуясь уравнениями Лагранжа, дифференциальное уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z (см. рис. 32 на стр. 63). В данном случае тело имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ ($q_1 = \varphi$). Тогда уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1. \qquad \text{(а)}$$

Кинетическая энергия тела

$$T = \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_z \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения z.

Сообщая телу виртуальное перемещение — поворот на угол $\delta\varphi$, найдем, что

$$\delta A = \left(\sum \mathrm{mom}_z \boldsymbol{F}_i\right) \delta\varphi = M_z \delta\varphi;$$

следовательно,

$$Q_1 = M_z.$$

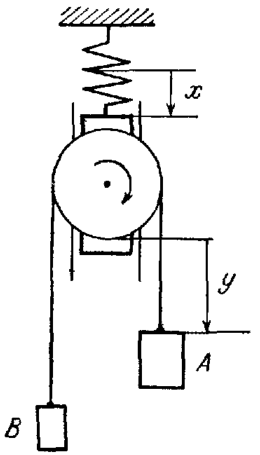


Рис. 34.

Подставляя все найденные величины в уравнение (а), получим

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z. \qquad \text{(б)}$$

Результат совпадает с найденным выше [см. § 5, п. 4, пример 3].

2. Через блок перекинута нить с двумя грузами A и B массой m_1 и m_2 на концах (рис. 34). Пренебрегая массой нити и блока, найдем движение системы, считая, что блок подвешен на вертикальной пружине с жесткостью c (такая схема учитывает влияние упругих деформаций оси блока). Движение начинается из состояния покоя.

При условиях задачи грузы будут перемещаться по вертикали и положение системы определяется двумя параметрами x и y ($q_1 = x$, $q_2 = y$), где x — смещение оси блока от положения статического равновесия, y — расстояние груза A от блока.

Выражение кинетической энергии системы через $\dot{x}$ и $\dot{y}$ имеет, очевидно, вид

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x} - \dot{y})^2.$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_1(\dot{x} + \dot{y}) + m_2(\dot{x} - \dot{y}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_1(\dot{x} + \dot{y}) - m_2(\dot{x} - \dot{y});$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Теперь, сообщая системе виртуальное перемещение, при котором x изменяется на δx, а $y = \mathrm{const}$, и учитывая, что x отсчитывается от статического положения, в котором сила тяжести $(m_1 + m_2) g$ уравновешена упругой силой пружины, будем иметь

$$\delta A_1 = -cx \cdot \delta x \quad \text{и} \quad Q_1 = -cx.$$

Сообщая затем системе другое независимое от первого виртуальное перемещение, при котором y изменяется на δy, а $x = \mathrm{const}$, получим, что на этом перемещении

$$\delta A_2 = (m_1 g - m_2 g)\,\delta y \quad \text{и} \quad Q_2 = (m_1 - m_2)\, g.$$

Составляя теперь уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_2,$$

получим

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 - m_2)\ddot{y} = -cx, \qquad \text{(а)}$$

$$(m_1 - m_2)\ddot{x} + (m_1 + m_2)\ddot{y} = (m_1 - m_2)\, g. \qquad \text{(б)}$$

Исключив из этой системы $\ddot{y}$, найдем для определения $x(t)$ уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = -a, \qquad \text{(в)}$$

где обозначено

$$k^2 = \frac{(m_1 + m_2)\, c}{4 m_1 m_2}; \quad a = \frac{(m_1 - m_2)^2\, g}{4 m_1 m_2}. \qquad \text{(г)}$$

Решение уравнения (в) при начальных данных $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, дает

$$x = -\frac{a}{k^2}(1 - \cos kt). \qquad \text{(д)}$$

Ось блока совершает гармонические колебания с частотой k и амплитудой

$$\frac{a}{k^2} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2}\,\frac{g}{c}.$$

Из решения примера 1 в § 5, п. 4 (см. рис. 30) видно, что эта амплитуда пропорциональна разности между статическим $N_{ст}$ и динамическим $N_д$ давлением на жесткую ось. При этом, так как $N_д < N_{ст}$, то естественно, что из начального положения ось начинает движение вверх, на что указывает знак минус в уравнении (д).

Интегрируя теперь дважды уравнение (б) и отсчитывая y от начального положения, получим

$$(m_1 + m_2)\, y = (m_1 - m_2)\frac{gt^2}{2} - (m - m_2)\, x.$$

Заменяя здесь x его значением из уравнения (д), найдем окончательно

$$y = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{gt^2}{2} + \frac{m - m_1}{m + m_2}\,\frac{a}{k^2}(1 - \cos kt). \qquad \text{(е)}$$

Равенство (е) определяет закон удаления груза A от оси блока; для абсолютного движения груза A будем, очевидно, иметь $y_A = y + x$, а для груза B

соответственно $y_B = y - x$, где y_B отсчитывается от начального положения груза вверх.

Поскольку все действующие на систему силы потенциальны, то для нее можно составить функцию Лагранжа

$$L = T + U = \frac{m_1}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x} - \dot{y}) - \frac{cx^2}{2} + (m_1 - m_2)gy + \text{const}.$$

Тогда, используя уравнения (21), придем к тем же результатам, т. е. к уравнениям (а) и (б).

3. Составить дифференциальные уравнения движения и найти закон малых колебаний системы, состоящей из сплошного однородного цилиндра весом P и шарнирно прикрепленного к его оси стержня AB длиною l и весом p (рис. 35). Цилиндр находится на шероховатой горизонтальной плоскости, вдоль которой может катиться без скольжения.

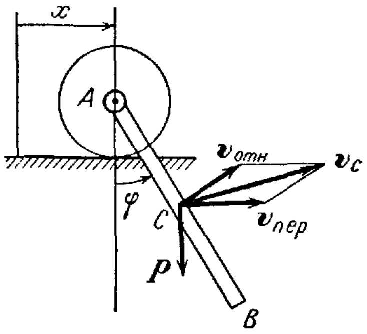


Рис. 35.

Система имеет, очевидно, две степени свободы, и ее положение определяется параметрами x и φ ($q_1 = x$ — расстояние цилиндра от его начального положения, $q_2 = \varphi$ — отклонение стержня от вертикали).

Вычислим сначала кинетическую энергию $T_ц$ цилиндра и $T_{ст}$ стержня. По теореме Кёнига

$$T_ц = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_A^2 + \frac{1}{2}\frac{PR^2}{2g}\omega_ц^2,$$
$$T_{ст} = \frac{1}{2}\frac{p}{g}v_C^2 + \frac{1}{2}\frac{pl^2}{12g}\omega_{ст}^2, \qquad (а)$$

где множители перед $\omega_ц^2$ и $\omega_{ст}^2$ являются соответственно моментами инерции цилиндра и стержня относительно осей, проходящих через точки A и C перпендикулярно к плоскости рис. 35.

Выражая все скорости через $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$ и учитывая, что $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{отн} + \boldsymbol{v}_{пер}$, где численно $v_{отн} = 0{,}5l\dot{\varphi}$, $\boldsymbol{v}_{пер} = \boldsymbol{v}_A$, имеем

$$v_A = \dot{x}, \quad \omega_ц = \frac{\dot{x}}{R}, \quad \omega_{ст} = \dot{\varphi}, \quad v_C^2 = \frac{l^2\dot{\varphi}^2}{4} + \dot{x}^2 + l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi.$$

В результате окончательно получим

$$T = T_ц + T_{ст} = \frac{3}{4}\frac{P}{g}\dot{x}^2 + \frac{p}{2g}\left(\dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3P + 2p}{2g}\dot{x} + \frac{pl}{2g}\dot{\varphi}\cos\varphi; \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{p}{g}\left(\frac{l}{2}\dot{x}\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}\right); \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{p}{2g}l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Для вычисления обобщенных сил сообщаем сначала системе перемещение, при котором x получает приращение δx, а $\varphi = \text{const}$, получаем $\delta A_1 = 0$ и, следовательно, $Q_1 = 0$. Сообщая теперь другое, независимое от первого

перемещение, при котором φ получает приращение $\delta\varphi$, а $x = \text{const}$, найдем $\delta A_2 = -p\frac{l}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi$; следовательно, $Q_2 = -p\frac{l}{2}\sin\varphi$.

Составляя теперь уравнения Лагранжа, получим после очевидных сокращений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[(3P + 2p)\dot{x} + pl\dot{\varphi}\cos\varphi] = 0, \ldots \\ &\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\varphi + \frac{2}{3}l\dot{\varphi}\right) + \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi = -g\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (а)$$

Таковы искомые дифференциальные уравнения движения системы. Чтобы найти закон малых колебаний, примем, считая угол φ малым, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ и пренебрежем членом $\dot{x}\varphi\dot{\varphi}$, содержащим произведения малых величин. Тогда окончательно получим следующие дифференциальные уравнения малых колебаний системы:

$$(3P + 2p)\ddot{x} + pl\ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{x} + \frac{2}{3}l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \qquad (б)$$

Исключая из этих равенств $\ddot{x}$, найдем для определения φ уравнение

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \qquad (в)$$

где

$$k^2 = \frac{3(3P + 2p)}{6P + p}\cdot\frac{g}{l}. \qquad (г)$$

Интегрируя уравнение (в) и полагая при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, получим

$$\varphi = \varphi_0\cos kt. \qquad (д)$$

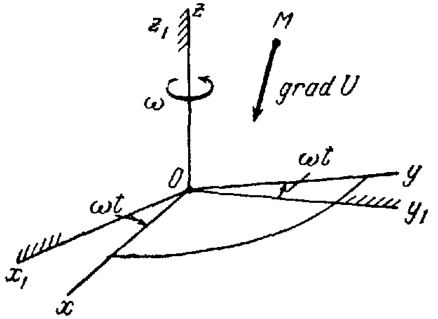


Рис. 36.

После этого, интегрируя первое из уравнений (б) и полагая при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = 0$, найдем

$$x = \frac{p}{3P + 2p}l\varphi_0(1 - \cos kt). \qquad (е)$$

Уравнения (в) и (е) определяют закон малых колебаний системы, частота которых равна k. Такой сравнительно простой результат для системы с двумя степенями свободы получился здесь благодаря тому, что $Q_1 = 0$. В общем же случае при $Q_1 \neq 0$ и $Q_2 \neq 0$ колебания системы с двумя степенями свободы выглядят значительно сложнее (см. гл. III).

4. Рассмотрим материальную точку с массой m, которая движется в потенциальном силовом поле с потенциальной функцией $U(x, y, z)$ относительно подвижной системы отсчета xyz, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z (рис. 36); вращение происходит по отношению к инерциальной системе отсчета $x_1y_1z_1$.

Выберем в качестве обобщенных координат координаты точки x, y, z в подвижной системе отсчета. Для составления уравнений Лагранжа вычислим проекции *абсолютной* скорости точки на подвижные оси (напоминаем, что в уравнениях Лагранжа T есть кинетическая энергия абсолютного движения). Имеем

$$v_x = \dot{x} - \omega y; \quad v_y = \dot{y} + \omega x, \quad v_z = \dot{z}.$$

Тогда кинетическая энергия точки будет

$$T=\frac{1}{2}m\{(\dot{x}-\omega y)^2+(\dot{y}+\omega x)^2+\dot{z}^2\},$$

или

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+m\omega(x\dot{y}-y\dot{x})+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2). \qquad \text{(а)}$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m(\dot{x}-\omega y),\quad \frac{\partial T}{\partial x}=m(\omega\dot{y}+\omega^2 x);$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m(\dot{y}+\omega x),\quad \frac{\partial T}{\partial y}=-m(\omega\dot{x}-\omega^2 y);$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z},\quad \frac{\partial T}{\partial z}=0.$$

Теперь, составляя соответствующие уравнения Лагранжа, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2 x)&=\frac{\partial U}{\partial x};\\ m(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2 y)&=\frac{\partial U}{\partial y};\\ m\ddot{z}&=\frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(б)}$$

Мы получили дифференциальные уравнения *относительного* движения точки. Как видим, при применении метода Лагранжа эти уравнения составляются так же, как и уравнения абсолютного движения; все определяется лишь выбором соответствующих обобщенных координат.

Первые два из уравнения (б) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=\frac{\partial U}{\partial x}+2m\omega\dot{y}+m\omega^2 x;\\ m\ddot{y}&=\frac{\partial U}{\partial y}+(-2m\omega\dot{x})+m\omega^2 y.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(в)}$$

Легко видеть, что последние члены в правых частях уравнеиий (в) представляют собой проекции переносной (центробежной) силы инерции, а предпоследние — кориолисовой силы инерции. Таким образом, результат совпадает с тем, который дает метод, изложенный в части I, § 39.

В рассматриваемом примере уравнения, дающие связь декартовых координат точки в основной системе отсчета, т. е. x_1, y_1, z_1, с обобщенными координатами x, y, z, имеют вид

$$x_1=x\cos\omega t-y\sin\omega t,\quad y_1=x\sin\omega t+y\cos\omega t,\quad z_1=z$$

и содержат явно время. Следовательно, система не является склерономной (в силу условий, налагаемых движением системы отсчета xyz, к которой отнесены обобщенные координаты); поэтому здесь, в отличие от предыдущих примеров, кинетическая энергия не является однородной квадратичной

формой от скоростей и, как видно из равенства (а), имеет вид $T=T_2+T_1+T_0$, где

$$T_2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2);\quad T_1=m\omega(x\dot{y}-y\dot{x});$$
$$T_0=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2).$$

Но поскольку оказалось, что T, как и U, явно от времени не зависят, здесь имеет место обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби)

$$T_2-T_0-U=h$$

или

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)-U=h. \qquad \text{(г)}$$

В этом равенстве первый член можно рассматривать как кинетическую энергию точки в относительном движении, а второй — как потенциал переносной (центробежной) силы инерции, который накладывается на поле потенциала U. Гироскопический член $T_1=m\omega(x\dot{y}-y\dot{x})$ в выражение интеграла (г) не входит.

В соответствии с равенством (31) гироскопическая сила должна иметь проекции:

$$\tilde{Q}_x=-\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T_1}{\partial x}\right],\quad \tilde{Q}_y=-\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial T_1}{\partial y}\right].$$

Но

$$\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}}=-m\omega y,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}}=-m\omega\dot{y}\quad \text{и}\quad \frac{\partial T_1}{\partial x}=m\omega\dot{y}.$$

Следовательно, $\tilde{Q}_x=2m\omega\dot{y}$; аналогично $\tilde{Q}_y=-2m\omega\dot{x}$, т. е. гироскопической силой здесь является кориолисова сила инерции [см. равенство (в)]. Ее работа

$$dA=\tilde{Q}_x\,dx+\tilde{Q}_y\,dy=2m\omega(\dot{y}\,dx-\dot{x}\,dy)=2m\omega(\dot{y}\dot{x}-\dot{x}\dot{y})\,dt=0$$

(см. также ч. I, § 39, п. 4). По этой причине и отсутствует гироскопический член в интеграле (г).

7. Уравнения движения для склерономной системы, разрешенные относительно вторых производных. Для склерономной системы кинетическая энергия будет однородной квадратичной формой скоростей, а уравнениями движения будут уравнения (10), т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (36)$$

где, по предположению,

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=\sum_i a_{ik}\dot{q}_i,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=\sum_i a_{ik}\ddot{q}_i+\sum_{i,j}\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$
$$\frac{\partial T}{\partial q_k}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (36), имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_i + \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j = Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{37}$$

В эти уравнения вторые производные входят линейно, и нетрудно разрешить эту систему n уравнений относительно $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$.

Более изящное решение получим, введя особый символ, так называемый символ Кристоффеля. Разбивая второй член левой части в уравнениях (37) на два и переставляя в последнем из них индексы i и j, будем иметь

$$\sum_{i,\,j} \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j} \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j;$$

и уравнения (37) примут вид

$$\sum_{i} a_{ik}\ddot{q}_i + \sum_{i,\,j} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

Введя теперь символ Кристоффеля

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right) \equiv \begin{bmatrix} i & j \\ & k \end{bmatrix}, \tag{39}$$

получим уравнения движения (38) в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_i + \sum_{i,\,j=1}^{n} \begin{bmatrix} i & j \\ & k \end{bmatrix} \dot{q}_i\dot{q}_j = Q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

Обозначим через $D \equiv \| a_{ik} \|$ дискриминант квадратичной формы $\sum\limits_{i,\,k} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$; минор D, соответствующий элементу a_{ik}, обозначим через A_{ik}; тогда

$$\tilde{a}_{ik} = \frac{A_{ik}}{D}$$

будет элементом определителя, взаимного с D, причем будут иметь место два следующих соотношения:

$$\sum_{k} a_{ki}\tilde{a}_{kl} = 0 \quad (\text{если } i \neq l),$$

$$\sum_{k} a_{ki}\tilde{a}_{kl} = 1 \quad (\text{если } i = l).$$

Умножим теперь обе части уравнений (40) на $\tilde{a}_{kl}$ и просуммируем по k; получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{kl}\ddot{q}_i + \sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i & j \\ & k \end{bmatrix} \tilde{a}_{kl}\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kl}Q_k.$$

При $i = l$ член первой двойной суммы будет $\ddot{q}_l \sum\limits_{k} a_{lk}\tilde{a}_{kl} = \ddot{q}_l$; если же $i \neq l$, то члены первой двойной суммы обращаются в нуль. Вводя теперь новый символ, так называемый символ Кристоффеля 2-го рода,

$$\begin{Bmatrix} i & j \\ & l \end{Bmatrix} \equiv \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i & j \\ & k \end{bmatrix} \tilde{a}_{kl}, \tag{41}$$

получим окончательно

$$\ddot{q}_l + \sum_{i,\,j=1}^{n} \begin{Bmatrix} i & j \\ & l \end{Bmatrix} \dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kl}Q_k \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{42}$$

Равенства (42) выражают уравнения Лагранжа в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с искомыми функциями q, разрешенных относительно вторых производных.

Если мы предположим, что движущаяся система свободна от действия активных сил, т. е. $Q_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и будем рассматривать систему как точку в n-мерном пространстве (см. п. 2 этого параграфа), то изображающая систему точка будет двигаться по геодезической линии данного n-мерного пространства; следовательно, система уравнений

$$\frac{d^2q_l}{dt^2} + \sum_{i,\,j=1}^{n} \begin{Bmatrix} i & j \\ & l \end{Bmatrix} \frac{dq_j}{dt}\frac{dq_i}{dt} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

будет представлять собой дифференциальные уравнения геодезических линий n-мерного пространства в параметрической форме, причем t будет параметром.

8. Игнорирование координат. Функция Рауса. Как известно (см. ч. I, § 40, п. 7), циклической координатой называется координата, входящая в лагранжеву функцию $L(q, \dot{q}; t)$ только своей производной; явно, следовательно, эта координата в L не содержится. Раус показал, что в таком случае число уравнений движения можно уменьшить на число циклических координат.

Пусть, для определенности, будут циклическими первые l координат, т. е. $q_1, q_2, \ldots, q_l$, где $l \leqslant n$; производные $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_l$ от циклических координат будем называть циклическими скоростями; тогда

$$L = L(q_{l+1}, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_l, \dot{q}_{l+1}, \ldots, \dot{q}_n; t).$$

Для циклических координат $q_1, \ldots, q_l$, очевидно, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

и поэтому уравнения движения для этих координат примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l). \tag{44}$$

Интегрируя эти l уравнений, находим l первых интегралов уравнений движения:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}=c_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{45}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_l$ суть произвольные постоянные; эти интегралы будем называть циклическими интегралами. Выразив из этих равенств производные циклических координат, т. е. $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_l$, в функции остальных нециклических координат, их производных и произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_l$ и подставив найденные функции вместо $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_l$ в оставшиеся $n-l$ уравнений движения, получим, опять лагранжеву систему уравнений движения, но уже с $n-l$ неизвестными. Это и выполнил Раус (Routh); примененный им способ называется способом исключения или игнорирования координат.

Введем новую функцию, играющую ту же роль, что и функция Лагранжа. Эта функция, называемая *функцией Рауса*, имеет вид

$$R=L-\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k. \tag{46}$$

В функции Рауса производные циклических координат $\dot q_1, \ldots, \dot q_l$ заменены указанным выше способом, и потому

$$R=R(q_{l+1},\ \ldots,\ q_n;\ \ \dot q_{l+1},\ \ldots,\ \dot q_n;\ \ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l;\ t).$$

Варьируя правые и левые части равенства (46), находим

$$\sum_{k=l+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_k}\delta q_k+\sum_{k=l+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial \dot q_k}\delta \dot q_k+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial R}{\partial c_k}\delta c_k=\sum_{k=l+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta\dot q_k+\sum_{k=l+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta\dot q_k-\sum_{k=1}^{l}\delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)\dot q_k-\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta\dot q_k.$$

В правой части полученного равенства второй и последний члены сокращаются. Тогда, приравнивая в обеих частях этого равенства

множители при одинаковых вариациях и учитывая при этом, что, согласно равенствам (45), $\delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)=\delta c_k$, находим

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_k}&=\frac{\partial R}{\partial q_k},\\ \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}&=\frac{\partial R}{\partial \dot q_k},\end{aligned}\right\}\quad (k=l+1,\ \ldots,\ n),\\ &\dot q_k=-\frac{\partial R}{\partial c_k}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l).\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Подставляя найденные выражения для $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ и $\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$ в уравнения движения (21), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q_k}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_k}=0 \qquad (k=l+1,\ \ldots,\ n). \tag{48}$$

Таким образом, мы действительно получаем $n-l$ уравнений того же лагранжева вида, но в которых роль функции Лагранжа играет функция Рауса; эти уравнения содержат только нециклические координаты и их производные.

Зная функцию Рауса, легко определить и циклические координаты, так как последнее из равенств (47) дает

$$q_k=-\int\frac{\partial R}{\partial c_k}\,dt \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l). \tag{49}$$

В заключение отметим, что если R явно от времени не зависит, то уравнения (48) дают обобщенный интеграл энергии (см. п. 5):

$$-R+\sum_{k=l+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial \dot q_k}\dot q_k=\text{const}.$$

Если же, кроме того, R есть функция второй степени от нециклических скоростей $\dot q_{l+1}, \dot q_{l+2}, \ldots, \dot q_n$, т. е. если

$$R=R_2+R_1+R_0,$$

то предыдущий интеграл обратится в интеграл Якоби

$$R_2-R_0=\text{const};$$

члены, содержащиеся в R_1, будут в этом случае гироскопическими членами функции R.

Пример. В задачах, рассмотренных выше (п. 6), все или часть координат были циклическими, чем мы непосредственно пользовались при интегрировании сравнительно простых уравнений, не вводя функции Рауса. Покажем на примере, как производится игнорирование циклических координат методом Рауса.

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, определяемую координатами q_1 и q_2; пусть кинетическая энергия системы равна

$$T=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2,$$

а потенциальная

$$V=c+eq_2^2,$$

причем a, b, c, e суть постоянные. Функция L выразится так:

$$L=T-V=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-c-eq_2^2.$$

Координата q_1 будет циклической. Циклический интеграл получим в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\equiv\frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2}=\alpha,$$

откуда

$$\dot{q}_1=\alpha\left(a+bq_2^2\right),$$

где α есть постоянная, определяемая начальными условиями. Составляем функцию R; имеем

$$R\equiv L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1=-\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-c-eq_2^2.$$

Исключая циклическую скорость $\dot{q}_1$, получим

$$R=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-c-eq_2^2-\frac{1}{2}\alpha^2\left(a+bq_2^2\right).$$

Задача сводится к интегрированию одного уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial R}{\partial q_2}=0,$$

или

$$\ddot{q}_2+(2e+b\alpha^2)\,q_2=0,$$

откуда

$$q_2=A\sin\left(\sqrt{2e+b\alpha^2}\,t+\varepsilon\right),$$

где A и ε — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям.

Циклическая координата q_1 получится из уравнения

$$q_1=-\int\frac{\partial R}{\partial \alpha}\,dt=\alpha\int\left(a+bq_2^2\right)dt.$$

Подставляя сюда вместо q_2 найденное выражение и выполняя интегрирование, найдем q_1.

9. Уравнения движения неголономной системы в обобщенных координатах с множителями Лагранжа (уравнения Рауса). Пусть на систему материальных точек наложено k голономных связей, уравнения которых имеют вид

$$f_\varkappa(x,\ t)=0\qquad(\varkappa=1,\ 2,\ \dots,\ k),\tag{50}$$

и r неголономных линейных связей, выраженных уравнениями вида

$$\sum_{\nu=1}^{3N}a_{\rho\nu}\,dx_\nu+a_\rho\,dt=0\qquad(\rho=1,\ 2,\ \dots,\ r).\tag{50'}$$

Учитывая сначала только голономные связи и вводя $n=3N-k$ обобщенных координат q_i, мы, рассуждая так же, как и в п. 1, придем к уравнению (9)

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{Q_i-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\right\}\delta q_i=0.\tag{51}$$

Однако теперь в данном равенстве вследствие условий (50′) вариации δq_i не независимы, а потому коэффициенты при вариациях δq_i вообще не равны нулю. Для получения уравнений движения в этом случае применим способ неопределенных множителей (см. § 7).

Так как $x_\nu=\varphi_\nu(q,\ t)$, то

$$dx_\nu=\frac{\partial x_\nu}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}dq_i\qquad(\nu=1,\ 2,\ \dots,\ 3N).$$

Подставляя эти выражения dx_ν в равенства (50′), преобразуем уравнения неголономных связей к обобщенным координатам; имеем

$$\sum_{\nu=1}^{3N}a_{\rho\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}dq_i+\sum_{\nu=1}^{3N}a_{\rho\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}dt+a_\rho\,dt=0\qquad(\rho=1\ 2,\ \dots,\ r),$$

или, меняя порядок суммирования в двойной сумме,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{3N}a_{\rho\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\right)dq_i+\left(\sum_{\nu=1}^{3N}a_{\rho\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}+a_\rho\right)dt=0.$$

Вводя обозначения

$$\sum_{\nu=1}^{3N}a_{\rho\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}=A_{\rho i},\qquad\sum_{\nu=1}^{3N}a_{\rho\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}+a_\rho=A_\rho,$$

получим уравнения неголономных связей в обобщенных координатах в виде

$$\sum_{i=1}^{n}A_{\rho i}\,dq_i+A_\rho\,dt=0\qquad(\rho=1,\ 2,\ \dots,\ r).\tag{52}$$

Условия, налагаемые этими связями на изохронные вариации координат, будут

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\rho i}\,\delta q_i = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{52$'$}$$

Умножим теперь обе части равенств (52′) на λ_ρ и просуммируем по ρ; получим

$$\sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \sum_{i=1}^{n} A_{\rho i}\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho A_{\rho i}\right)\delta q_i = 0. \tag{53}$$

Сложив почленно равенство (53) с уравнением (51), найдем

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{Q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho A_{\rho i}\right\}\delta q_i = 0.$$

В этом равенстве всего n вариаций $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$, из них, в силу условий (50′), r зависимых; но и число неопределенных множителей λ тоже равно r. Тогда, применяя обычные при способе неопределенных множителей рассуждения, получим n уравнений движения системы в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho A_{\rho i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{54}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения связей (52), будем иметь полную систему $n+r$ уравнений с $n+r$ неизвестными функциями $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Заметим, что идея обобщенных координат по самому смыслу предполагает, что и их вариации независимы, чего нет в рассмотренном методе. Этот метод, предложенный Раусом, является комбинацией Лагранжевых методов обобщенных координат и неопределенных множителей. Поэтому в уравнения (54) входят еще множители λ_ρ, т. е. реакции связей, чем утрачивается одно из важных преимуществ уравнений Лагранжа 2-го рода.

10. Уравнения Аппеля. Аппель в 1899 г. нашел уравнения, которые по типу своему близко подходят к уравнениям Лагранжа 2-го рода и применимы к неголономным системам (а следовательно, и к голономным, которые являются частным случаем неголономных). Выведем эти уравнения из основного уравнения динамики Даламбера — Лагранжа.

Пусть имеем систему N материальных точек, положение которой определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$; тогда $x_\nu = \varphi_\nu(q;\ t)$ и, следовательно,

$$dx_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\,dq_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}\,dt,\quad \delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\,\delta q_i \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N). \tag{55}$$

Пусть, далее, на систему наложены неголономные связи, уравнения которых в обобщенных координатах имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\rho i}\,dq_i + a_\rho\,dt = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{56}$$

Эти связи, как известно, налагают на вариации координат условия

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\rho i}\,\delta q_i = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{56$'$}$$

Таким образом, n дифференциалов $dq_1, \ldots, dq_n$, а также и вариаций $\delta q_1\ \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ связаны r условиями (56) и (56′); поэтому число независимых дифференциалов и вариаций (а следовательно, и число степеней свободы системы) будет равно $n-r$ (см. § 1, п. 2).

Посредством равенств (56) и (56′) исключим из уравнений (55) r зависимых дифференциалов и вариаций; получим, обозначая соответствующие коэффициенты через $A_{\nu i}$ и A_ν

$$dx_\nu = \sum_{i=1}^{n-r} A_{\nu i}\,dq_i + A_\nu\,dt,\quad \delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n-r} A_{\nu i}\,\delta q_i \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N), \tag{57}$$

причем здесь дифференциалы и вариации будут уже независимы.

Возьмем уравнение Даламбера — Лагранжа

$$\sum_{\nu=1}^{3N}(X_\nu - m_\nu \ddot x_\nu)\,\delta x_\nu = 0$$

и вставим в него выражения вариаций δx_ν из равенств (57); получим

$$\sum_{i=1}^{n-r}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot x_\nu A_{\nu i}\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n-r}\sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu A_{\nu i}\,\delta q_i. \tag{58}$$

В правой части уравнения (58) стоит элементарная работа активных сил, которую, введя обозначения

$$\sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu A_{\nu i} = Q_i' \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-r), \tag{59}$$

можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n-r}\sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu A_{\nu i}\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n-r} Q_i'\,\delta q_i. \tag{60}$$

Величины Q_i' являются здесь обобщенными силами для независимых вариаций обобщенных координат и число их равно $n-r$, т. е. меньше числа обобщенных координат n [в отличие от обобщенных сил Q_i, входящих в выражение (16), которые вычисляются для всех вариаций координат и число которых равно n].

Преобразуем теперь левую часть уравнения (58). Разделив первую группу уравнений (57) на dt, получим

$$\dot{x}_\nu = \sum_{i=1}^{n-r} A_{\nu i}\dot{q}_i + A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3N);$$

продифференцировав это равенство по времени, найдем

$$\ddot{x}_\nu = \sum_{i=1}^{n-r} A_{\nu i}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n-r}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{\nu i}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n-r}\frac{\partial A_{\nu i}}{\partial t}\dot{q}_i + \frac{\partial A_\nu}{\partial t}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, 3N).$$

Из полученного равенства имеем

$$A_{\nu i} = \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_i};$$

тогда левую часть уравнения (58) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n-r}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu A_{\nu i}\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n-r}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_i}\,\delta q_i.$$

Введем функцию

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu^2, \tag{61}$$

которая по аналогии с кинетической энергией называется *энергией ускорений*. Тогда, очевидно,

$$\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-r)$$

и уравнение (58) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{n-r}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} - Q_i'\right)\delta q_i = 0,$$

откуда, так как вариации δq_i здесь независимы, имеем

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-r). \tag{62}$$

Уравнения (62) и представляют собой *уравнения Аппеля*; они, как и уравнения Лагранжа, образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, число которых равно $n-r$, т. е. числу степеней свободы системы (а не числу n обобщенных координат).

Для получения уравнений (62) надо составить выражение энергии ускорения S (61), выразив в нем все ускорения через координаты $q_1\ q_2, \ldots, q_n$, а затем посредством уравнений неголономных связей (56) исключить из S вторые производные тех из координат q, которые в силу уравнений (56) являются зависимыми (при всех этих расчетах слагаемые, не содержащие $\ddot{q}$, могут, очевидно, не вычисляться). Для нахождения Q_i' составляется выражение элементарной работы действующих сил в виде (16), т. е.

$$\delta A = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n,$$

и из этого выражения посредством уравнений (56′), выражающих условия, налагаемые на вариации координат дифференциальными связями, исключаются вариации зависимых координат; тогда коэффициенты при вариациях $n-r$ независимых координат дадут величины $Q_1', Q_2', \ldots, Q_{n-r}'$. После этого составляются уравнения (62), которые вместе с уравнениями дифференциальных связей (56) дают систему n уравнений для определения n функций $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Заметим, что для энергии ускорений S имеет место теорема, аналогичная теореме Кёнига для кинетической энергии (см. § 2, п. 6). Применяя те же обозначения, что и в § 2, имеем

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right)^2,$$

или, так как $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_\nu'$,

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu'}{dt^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu'}{dt^2}\right)^2 + \frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu'}{dt^2}.$$

Последний член правой части равен нулю, так как

$$\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu'}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu\boldsymbol{r}_\nu', \quad \text{а} \quad \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu\boldsymbol{r}_\nu' = 0.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}Mw_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu w_\nu'^2, \tag{63}$$

где w_ν' есть ускорение в движении системы относительно центра масс.

Уравнением (63) бывает удобно пользоваться для вычисления энергии ускорений твердых тел.

Пример. Рассмотрим движение вдоль наклонной плоскости саней, (рис. 37, *а*), пренебрегая трением. Система является неголономной, если считать, что сани не могут перемещаться в направлении, перпендикулярном к полозьям.

Положение саней в плоскости движения Oxy определяется тремя координатами, в качестве которых выберем декартовы координаты x, y центра масс C саней и угол φ, который полозья образуют с линией наибольшего ската (рис. 37, *б*), т. е. примем $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \varphi$.

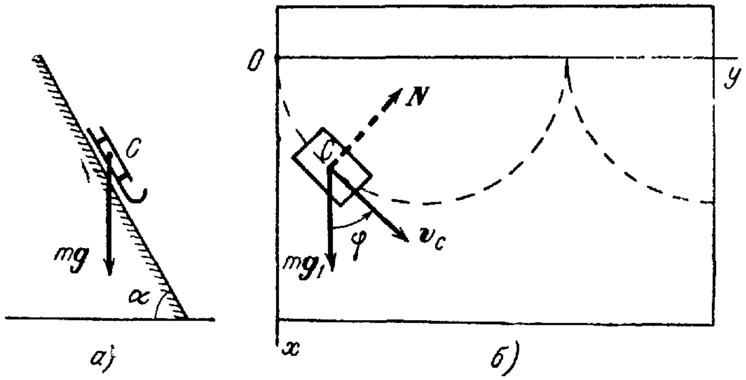


Рис. 37.

В силу указанного выше условия вектор скорости v_C центра масс саней всегда направлен параллельно полозьям, что налагает на его проекции $\dot{x}$, $\dot{y}$ условие $\dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ или

$$\dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi - \dot{y} = 0. \qquad \text{(а)}$$

Это уравнение неголономной связи вида (52) или (56).

На сани в плоскости движения действует составляющая силы тяжести mg_1 ($g_1 = g\sin\alpha$), параллельная оси x; кроме того, для уяснения всех особенностей метода допустим еще, что к саням приложена в центре масс C постоянная сила $F = ma$, параллельная оси y (на рисунке сила $\boldsymbol{F}$ не показана).

1) Уравнения с множителями. Составим сначала уравнения движения саней, пользуясь уравнениями (54) с множителями λ_ρ. Кинетическая энергия системы по теореме Кёнига будет

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2, \qquad \text{(б)}$$

где J_{Cz} — момент инерции саней относительно оси, проходящей через центр C перпендикулярно к плоскости xy.

Выражение элементарной работы действующих сил имеет вид

$$\delta A = mg_1\,\delta x + ma\,\delta y; \qquad \text{(в)}$$

следовательно, $Q_1 = mg_1$, $Q_2 = ma$, $Q_3 = 0$.

Уравнение (а) накладывает на вариации координат условие

$$\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\delta x - \delta y = 0. \qquad \text{(г)}$$

Сравнивая это выражение с равенством (52′), заключаем, что в нашем случае $A_{11} = \mathrm{tg}\,\varphi$; $A_{12} = -1$; $A_{13} = 0$ и уравнения (54) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg_1 + \lambda\,\mathrm{tg}\,\varphi,\\ m\ddot{y} &= ma - \lambda,\\ J_{Cz}\ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(д)}$$

Присоединяя сюда уравнение связи (а), получаем четыре уравнения для определения четырех функций x, y, φ, λ.

Для решения системы исключаем сначала из первых двух уравнений системы (д) множитель λ; сокращая одновременно на m, получаем

$$\ddot{x} + \ddot{y}\,\mathrm{tg}\,\varphi = g_1 + a\,\mathrm{tg}\,\varphi. \qquad \text{(е)}$$

Отсюда в свою очередь с помощью уравнения (а) исключаем вторую производную от зависимой координаты y. Дифференцируя равенство (а), имеем

$$\ddot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi + \dot{x}\dot{\varphi}\frac{1}{\cos^2\varphi} = \ddot{y}. \qquad \text{(ж)}$$

Подставляя это значение $\ddot{y}$ в равенство (е), получаем

$$\ddot{x}(1 + \mathrm{tg}^2\varphi) + \dot{x}\dot{\varphi}\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi} = g_1 + a\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Окончательно задача сводится к интегрированию системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x}\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi &= g_1\cos^2\varphi + a\sin\varphi\cos\varphi,\\ \ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(з)}$$

2) Уравнения Аппеля. Покажем теперь, как этот же результат получается с помощью уравнений Аппеля.

Для составления энергии ускорений воспользуемся формулой (63). Учитывая, что движение саней относительно центра масс является вращательным вокруг оси Cz и при этом $w'_\nu = h_\nu\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}$, где h_ν — расстояние какой-либо точки саней от оси вращения, а $\sum m_\nu h_\nu^2 = J_{Cz}$, найдем

$$S = \frac{m}{2}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{2}J_{Cz}(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

Исключаем отсюда вторую производную от зависимой координаты y с помощью уравнения связи (а). Это уравнение дает для $\ddot{y}$ выражение (ж); в результате получим

$$S = \frac{m}{2}\left(\frac{\ddot{x}^2}{\cos^2\varphi} + 2\ddot{x}\dot{x}\dot{\varphi}\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi}\right) + \frac{1}{2}J_{Cz}\ddot{\varphi}^2 + \ldots, \qquad \text{(и)}$$

где многоточие указывает на невыписанные члены, не содержащие $\ddot{x}$ или $\ddot{\varphi}$.

Для нахождения Q'_i обратимся к выражению элементарной работы (в). Входящие туда вариации δx, δy связаны в силу уравнения (а) условием

$$\mathrm{tg}\,\varphi\,\delta x - \delta y = 0, \text{ откуда } \delta y = \mathrm{tg}\,\varphi\,\delta x.$$

Подставляя это значение δy в равенство (в), получим

$$\delta A = (mg_1 + ma\,\mathrm{tg}\,\varphi)\,\delta x + 0\cdot\delta\varphi.$$

Следовательно,

$$Q'_{(x)} = (mg_1 + a\,\mathrm{tg}\,\varphi), \quad Q'_{(\varphi)} = 0. \tag{к}$$

Составляя теперь с помощью функции (и) уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}} = Q'_{(x)}, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = Q'_{(\varphi)},$$

найдем

$$m\left(\frac{\ddot{x}}{\cos^2\varphi} + \dot{x}\dot{\varphi}\,\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi}\right) = m\,(g_1 + a\,\mathrm{tg}\,\varphi); \quad J_{Cz}\ddot{\varphi} = 0.$$

В результате сразу получаем систему (з).

3) Интегрирование уравнений движения. Проинтегрируем теперь дифференциальные уравнения движения, считая, что при $t=0$ $x=0$, $y=0$, $\varphi=0$, $\dot{x}=v_0$, $\dot{\varphi}=\omega_0$ [величина $\dot{y}_0$ не может быть задаваема, так как она связана с $\dot{x}_0$ соотношением (а)]. Кроме того, будем считать, что на сани действует только сила тяжести, т. е. положим $a=0$ (сила $F=ma$ была введена лишь с целью отметить все особенности вычисления величин Q'_i).

Тогда из второго уравнения системы (з) получаем $\varphi = \omega_0 t$ и первое уравнение принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0\dot{x}\,\mathrm{tg}\,\omega_0 t = g_1\cos^2\omega_0 t.$$

Это линейное уравнение легко интегрируется, например, подстановкой $\dot{x} = pq$ и при указанных выше начальных условиях дает

$$\dot{x} = \frac{g_1}{\omega_0}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t + v_0\cos\omega_0 t;$$

тогда из уравнения (а) имеем

$$\dot{y} = \frac{g_1}{\omega_0}\sin^2\omega_0 t + v_0\sin\omega_0 t.$$

Интегрируя полученные уравнения еще раз и учитывая начальные условия, найдем окончательно

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{g_1}{2\omega_0^2}\sin^2\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t,\\ y &= \frac{g_1}{2\omega_0}t + \frac{v_0}{\omega_0}(1-\cos\omega_0 t) - \frac{g_1}{4\omega_0^2}\sin 2\omega_0 t,\\ \varphi &= \omega_0 t. \end{aligned}\right\} \tag{л}$$

Уравнения (л) и определяют закон движения саней. Из них следует, что сани будут равномерно вращаться вокруг центра масс с угловой скоростью ω_0, а центр масс будет описывать кривую, заключенную между горизонтальными прямыми $x = \frac{g_1}{2\omega_0^2} + \frac{v_0}{\omega_0}$ и $x = -\frac{v_0^2}{2g_1}$, в чем можно убедиться, решив уравнение $\dot{x} = 0$.

В частном случае, когда $v_0 = 0$, центр масс описывает циклоиду

$$x = \frac{g_1}{4\omega_0^2}(1-\cos 2\omega_0 t), \qquad y = \frac{g_1}{4\omega_0^2}(2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t)$$

с точками возврата на оси y.

В другом частном случае при движении вдоль горизонтальной плоскости ($g_1 = 0$) траекторией центра масс будет окружность

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2,$$

имеющая центр на оси y и касающаяся оси x в начале координат.

Наконец, при $\omega_0 = 0$ уравнения (л) дают после раскрытия неопределенностей очевидный результат: $x = v_0 t + \frac{g_1 t^2}{2}$, $y = 0$.

Имея решение (л), можно из уравнений (д) определить реакцию неголономной связи. Согласно уравнениям (д)

$$N_x = \lambda\,\mathrm{tg}\,\omega_0 t, \quad N_y = -\lambda.$$

Кроме того, $\lambda = -m\ddot{y}$ (при $a=0$), т. е.

$$\lambda = -m\,(g_1\sin 2\omega_0 t + v_0\omega_0\cos\omega_0 t).$$

Следовательно,

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = m\,|v_0\omega_0 + 2g_1\sin\omega t|.$$

Направлена реакция N, как нетрудно проверить, перпендикулярно к вектору v_C (см. рис. 37, *б*).

11. Уравнения Чаплыгина. Пусть система, положение которой определяется n координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, подчинена r *стационарным* неголономным связям, налагающим на обобщенные скорости и вариации координат условия

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\rho j}\dot{q}_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{\rho j}\,\delta q_j = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \tag{64}$$

где $a_{\rho j}$ не зависят явно от t. Таким образом, независимых вариаций будет $l = n - r$. Условимся обозначать в дальнейшем символом q_i ($i = 1, 2, \ldots, l$) те из координат q_j, вариации которых мы будем считать независимыми, а через q_σ ($\sigma = l+1, l+2, \ldots, n$) остальные (зависимые) координаты.

Тогда из уравнений (64), линейных относительно $\dot{q}_j$, $\delta\dot{q}_j$, можно выразить все $\dot{q}_\sigma$ и δq_σ через $\dot{q}_i$ и δq_i в виде

$$\dot{q}_\sigma = \sum_{i=1}^{l} b_{\sigma i}\dot{q}_i \qquad (\sigma = l+1, l+2, \ldots, n), \tag{65}$$

$$\delta q_\sigma = \sum_{i=1}^{l} b_{\sigma i}\,\delta q_i \qquad (\sigma = l+1, l+2, \ldots, n). \tag{65'}$$

Далее, в равенстве $\delta A=\sum_{j=1}^{n} Q_j\delta q_j$, определяющем элементарную работу действующих сил, можно с помощью (65′) выразить все зависимые вариации δq_σ через δq_i и представить δA в виде

$$\delta A=\sum_{i=1}^{l} Q_i'\delta q_i, \tag{66}$$

где Q_i' — те же обобщенные силы, которые входят в уравнения Аппеля.

Пусть теперь рассматриваемая система такова, что все коэффициенты $b_{\sigma i}$ в равенствах (65), а также обобщенные силы Q_i' и кинетическая энергия системы T зависят не более чем от $l=n-r$ координат, где $n-r$ есть число степеней свободы системы, т. е., например, зависят только от $q_1, q_2, \ldots, q_l$ (но в выражение T могут входить *все* обобщенные скорости $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$). Тогда для такой неголономной системы имеют место уравнения, полученные С. А. Чаплыгиным в 1897 г.

Выведем эти уравнения исходя опять из уравнения Даламбера — Лагранжа, которое в обобщенных координатах (см. п. 1) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right]\delta q_j=0. \tag{67}$$

Так как, по предположению, T от $q_{l+1}, q_{l+2}, \ldots, q_n$ не зависит, то

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Далее, согласно равенству (66),

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j\delta q_j=\delta A=\sum_{i=1}^{l} Q_i'\delta q_i.$$

Наконец,

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)\delta q_j=\sum_{i=1}^{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i+\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\right)\delta q_\sigma,$$

где, согласно соотношениям (65′),

$$\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\right)\delta q_\sigma=\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\right)\sum_{i=1}^{l} b_{\sigma i}\,\delta q_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{l}\left[\sum_{\sigma=l+1}^{n} b_{\sigma i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\right)\right]\delta q_i.$$

Подставляя все найденные величины в равенство (67), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{l}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)+\sum_{\sigma=l+1}^{n} b_{\sigma i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i'\right]\delta q_i=0.$$

Отсюда, так как все δq_i между собой независимы, находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i'+\sum_{\sigma=l+1}^{n} b_{\sigma i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\right)=0 \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,l). \tag{68}$$

Условимся в дальнейшем вместо $F(q_1, q_2, \ldots, q_l)$ писать $F(q_i)$ и т. д. Тогда, согласно сделанным допущениям, $T=T(q_i, \dot q_i, \dot q_\sigma)$. Обозначим через $\tilde T$ то выражение кинетической энергии, которое получится, если из T исключить все $\dot q_\sigma$ с помощью равенств (65). Таким образом,

$$\tilde T(q_i, \dot q_i)=T(q_i, \dot q_i, \dot q_\sigma)_{\dot q_\sigma\to\dot q_i},$$

где символ $\dot q_\sigma\to\dot q_i$ означает, что здесь все $\dot q_\sigma$ должны быть выражены через $\dot q_i$. Тогда, принимая еще во внимание равенства (65′), получим

$$\frac{\partial\tilde T}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\frac{\partial \dot q_\sigma}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\partial b_{\sigma\lambda}}{\partial q_i}\dot q_\lambda,$$

$$\frac{\partial\tilde T}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}+\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\frac{\partial \dot q_\sigma}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}+\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}b_{\sigma i},$$

а также, поскольку все $b_{\sigma l}$ зависят только от q_i,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde T}{\partial \dot q_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)+\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\right)b_{\sigma i}+\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\partial b_{\sigma i}}{\partial q_\lambda}\dot q_\lambda.$$

Вычисляя из найденных равенств значения $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)$ и $\frac{\partial T}{\partial q_i}$, подставляя их в уравнения (68) и учитывая, что $l=n-r$, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde T}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial\tilde T}{\partial q_i}=Q_i'+B_i \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n-r), \tag{69}$$

где

$$B_i=\sum_{\sigma=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\left[\sum_{\lambda=1}^{l}\left(\frac{\partial b_{\sigma i}}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial b_{\sigma\lambda}}{\partial q_i}\right)\dot q_\lambda\right]. \tag{70}$$

Уравнения (69) и представляют собой *уравнения Чаплыгина*. Напоминаем, что эти уравнения справедливы для склерономной системы, обладающей тем свойством, что коэффициенты в равенствах, выражающих зависимые обобщенные скорости через независимые, а также кинетическая энергия и обобщенные силы системы зависят не более чем от $s-r$ координат, где $s-r$ — число степеней свободы системы. Такой класс систем в приложениях встречается довольно часто.

Для получения уравнений Чаплыгина надо вычислить два выражения кинетической энергии: выражение T через все обобщенные скорости и выражение $\tilde{T}$ через независимые обобщенные скорости, затем подсчитать обобщенные силы Q'_l так же, как при составлении уравнений Аппеля, и, наконец, найти по формулам (70) члены B_i (подчеркнем, что в выражения B_i входит T, а не $\tilde{T}$). После этого составляются уравнения (69).

Уравнения (69) указывают также на то, какая ошибка будет сделана, если для неголономной системы составить обычные уравнения Лагранжа, исключив предварительно из выражения T зависимые обобщенные скорости с помощью уравнений связей: при этом утратятся члены B_i.

Пример. Составим уравнения движения саней вдоль наклонной плоскости (см. пример в конце п. 10 на стр. 101), пользуясь уравнениями Чаплыгина.

В этой задаче положение системы определяется координатами x, y, φ ($n=3$), а уравнение неголономной связи имеет вид

$$\dot{y} = (\operatorname{tg}\varphi)\,\dot{x}. \tag{а}$$

Кроме того,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2 \tag{б}$$

и обобщенные силы [см. п. 10, равенства (к)]

$$Q'_{(x)} = m(g_1 + a\operatorname{tg}\varphi), \qquad Q'_{(\varphi)} = 0. \tag{в}$$

Коэффициент при $\dot{x}$ в уравнении (а) и обобщенная сила $Q'_{(x)}$ зависят только от φ, а в равенство (б) координаты вообще не входят. Следовательно, для данной системы справедливы уравнения Чаплыгина.

Заменяя в выражении (б) $\dot{y}$ его значением из равенства (а), получим

$$\tilde{T} = \frac{m}{2}\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2. \tag{г}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{x}} = m\frac{\dot{x}}{\cos^2\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{m\ddot{x}}{\cos^2\varphi} + 2\frac{m\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi}{\cos^3\varphi}; \quad \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x} = 0;\\
&\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}} = J_{Cz}\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial\tilde{T}}{\partial\varphi} = m\frac{\dot{x}^2\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = m\frac{\dot{x}^2\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{д}$$

Для установления соответствия с формулами п. 11 будем считать $x=q_1$, $\varphi=q_2$, $y=q_3$. Тогда, учитывая, что в данном случае число неголономных связей $r=1$, а $l=n-r=2$, и сравнивая равенства (65) и (а), имеем $b_{31}=\operatorname{tg}\varphi$, $b_{32}=0$; далее в членах B_l будет $\sigma=3$ и они примут вид

$$B_i = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_3}\sum_{\lambda=1}^{2}\left(\frac{\partial b_{3i}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial b_{3\lambda}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_\lambda \qquad (i=1,\,2).$$

Заметим сразу, учитывая равенства (б) и (а), что

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} = m\dot{x}\operatorname{tg}\varphi.$$

Тогда, опуская члены, обращающиеся в нули, получим

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= m\dot{x}\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{\partial b_{31}}{\partial q_2}\dot{q}_2\right) = \frac{m\dot{x}\dot{\varphi}\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\varphi},\\
B_2 &= m\dot{x}\operatorname{tg}\varphi\left(-\frac{\partial b_{31}}{\partial q_2}\dot{q}_1\right) = -\frac{m\dot{x}^2\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{е}$$

Составляя с помощью соотношений (д) и (е) уравнения Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x} = Q'_{(x)} + B_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial\tilde{T}}{\partial\varphi} = Q'_{(\varphi)} + B_2$$

и учитывая равенства (в), получим окончательно

$$\ddot{x} + \dot{x}\dot{\varphi}\operatorname{tg}\varphi = g_1\cos^2\varphi + a\sin\varphi\cos\varphi, \quad \ddot{\varphi} = 0,$$

т. е. придем к той же системе уравнений, что и система (з) на стр. 102.

Неучет членов B_l привел бы, как видим, к ошибочным результатам.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

§ 9. Малые колебания системы

1. Уравнения движения системы под действием потенциальных сил в сопротивляющейся среде. Функция рассеяния. Рассмотрим голономную механическую систему, состоящую из N материальных точек, подчиненных связям, явно не зависящим от времени (т. е. склерономным). Пусть система имеет n степеней свободы; тогда положение системы будет определяться n независимыми координатами, которые обозначим через $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Допустим далее, что силы, действующие на систему, имеют потенциал $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$; тогда потенциальная энергия системы выразится функцией $V=-U$. Наконец, положим, что система движется в сопротивляющейся среде, влияние которой механически характеризуется тем, что на каждую точку системы действует сила, являющаяся функцией скорости и имеющая направление, противоположное направлению скорости. При малых скоростях можно считать, что обобщенная сила сопротивления, отнесенная к координате q_r, есть линейная функция обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ точек системы, т. е.

$$R_r = -\sum_{s=1}^{n} \varkappa_{rs}\dot{q}_s \qquad (r=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Введем для сил сопротивления функцию F, аналогичную потенциальной функции для обычных сил и называемую *функцией расссеяния* или *диссипативной функцией*. Для этого положим

$$R_r = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = -\sum_{s=1}^{n} \varkappa_{rs}\dot{q}_s. \tag{2}$$

Легко видеть, что сама функция рассеяния будет однородной функцией второй степени (квадратичной формой) обобщенных

скоростей, т. е.

$$F = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} \varkappa_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s. \tag{3}$$

При сделанных предположениях уравнения движения системы будут

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} \qquad (r=1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Кроме того, нами еще наложено ограничение на связи, а именно мы полагаем, что связи склерономны. В этом случае кинетическая энергия системы будет однородной функцией второй степени от обобщенных скоростей, т. е

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,s} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \tag{5}$$

где коэффициенты a_{rs} зависят явно только от координат q.

Используя уравнения движения (4), нетрудно выяснить механический смысл функции рассеяния. С этой целью обе части уравнения (4) умножим сначала на $\dot{q}_r$, а затем просуммируем по индексу r от 1 до n; получим

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)\dot{q}_r - \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_r}\dot{q}_r + \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_r}\dot{q}_r = -\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r. \tag{6}$$

Полученное выражение легко преобразуется в более простое. Действительно, по теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\sum_r \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r = 2F.$$

Очевидно также, что

$$\sum_r \frac{\partial V}{\partial q_r}\dot{q}_r = \frac{dV}{dt}. \tag{7}$$

Далее,

$$\sum_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)\dot{q}_r - \sum_r \frac{\partial T}{\partial q_r}\dot{q}_r = \frac{d}{dt}\left(\sum_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r\right) - \sum_r\left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\dot{q}_r + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r\right). \tag{8}$$

Так как по условию T есть однородная функция второй степени от скоростей $\dot{q}$, то по той же теореме Эйлера

$$\sum_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r = 2T;$$

вторая же сумма в правой части равенства (8) равна $\frac{dT}{dt}$; поэтому

$$\sum_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)\dot{q}_r - \sum_r \frac{dT}{dq_r}\dot{q}_r = 2\frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt}. \tag{9}$$

Подставляя выражения (7) и (9) в уравнение (6), получим

$$\frac{d(T+V)}{dt} = -2F,$$

или, обозначая полную механическую энергию системы через E, т. е. полагая $T+V=E$, будем иметь

$$\frac{dE}{dt} = -2F. \tag{10}$$

Выполняя интегрирование, находим, что

$$E = -\int 2F\,dt + \text{const}. \tag{10'}$$

Механический смысл функции рассеяния теперь ясен. Функция $2F$, как видно из равенства (10), дает меру убывания энергии в единицу времени, а формула (10′) — то же самое для конечного промежутка времени при движении системы в сопротивляющейся среде; итак, функция рассеяния есть мера убывания механической энергии системы.

2. Уравнения малых движений. Допустим, что рассматриваемая система может в некотором положении находиться в равновесии. Будем отсчитывать координаты q_r системы от положения равновесия, считая, что в этом положении $q_r=0$ ($r=1, 2, \ldots, n$) Тогда вблизи положения равновесия координаты q_r и их производные по времени будут величинами малыми; пользуясь этим, можно существенно упростить изучение малых движений системы вблизи положения равновесия, заменяя полные уравнения движения приближенными, в которых будут сохранены лишь члены первого порядка малости. Кроме того, изучение малых движений вблизи положения равновесия, к рассмотрению которых мы сейчас перейдем, позволяет судить и о характере самого равновесия

Пусть рассматриваемая система под действием приложенных к ней потенциальных сил находится в равновесии (силы сопротивления среды, зависящие от скоростей, при равновесии равны нулю). Тогда в положении равновесия потенциальная энергия V должна, как известно, иметь стационарное значение, т. е.

$$\delta V \equiv \sum_r \frac{\partial V}{\partial q_r}\delta q_r = 0.$$

Так как вариации δq_r между собой независимы, отсюда следует, что необходимые и достаточные условия равновесия системы имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \qquad (r=1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Допустим теперь, что система сообщением ей небольших возмущений выведена из положения равновесия, и составим для нее уравнения (4), ограничиваясь случаем малых движений, т. е. сохраняя в этих уравнениях члены с q_r, $\dot{q}_r$, $\ddot{q}_r$ только первого порядка малости. Поскольку в уравнения (4) входят производные от функций V, T и F по q_r или $\dot{q}_r$, то, чтобы сохранить в уравнениях (4) члены с q_r и $\dot{q}_r$ первого порядка, надо при вычислении функций V, T и F сохранить в них члены второго порядка.

Будем, как уже указывалось, отсчитывать координаты q_r от положения равновесия, считая в положении равновесия $q_r=0$. Тогда, разлагая потенциальную энергию системы в окрестности $q_r=0$ в ряд Тейлора, получим

$$V = V_0 + \sum_r \left(\frac{\partial V}{\partial q_r}\right)_0 q_r + \frac{1}{2}\sum_{r,\,s}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r\,\partial q_s}\right)_0 q_r q_s + \text{чл. высш. пор.}, \tag{12}$$

где индексом 0 отмечены значения функции V и ее производных в положении равновесия, т. е. при $q_r=0$ ($r=1, 2, \ldots, n$). Первая сумма в правой части равенства исчезает вследствие того, что в положении равновесия выполняются условия (11). Членами порядка выше третьего мы также, как было указано, пренебрегаем. Наконец, поскольку потенциальная энергия системы определяется с точностью до аддитивной постоянной, то полагаем аддитивную постоянную выбранной так, что $V_0=0$; в результате получаем

$$V = \frac{1}{2}\sum_{r,\,s} c_{rs} q_r q_s, \tag{12'}$$

где коэффициенты $c_{rs} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r\,\partial q_s}\right)_0$ постоянны.

Преобразуем теперь выражение кинетической энергии (5). Разлагая коэффициенты a_{rs}, являющиеся функциями координат q_r, в ряд Тейлора, получим

$$a_{rs} = (a_{rs})_0 + \sum_i \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \sum_{i,\,j}\left(\frac{\partial^2 a_{rs}}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)_0 q_i q_j + \text{чл. высш. пор.}$$

Вследствие малости скоростей удержим члены лишь второго порядка малости; тогда в разложении коэффициентов a_{rs} придется ограничиться только первым членом $(a_{rs})_0$, так как все остальные члены в произведении с $\dot{q}_r\dot{q}_s$ дадут члены не ниже третьего порядка. Выражение кинетической энергии поэтому примет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,\,s} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s; \tag{13}$$

в обозначениях коэффициентов a_{rs} здесь опущен индекс нуль; не следует, однако, забывать, что эти коэффициенты теперь являются постоянными. Коэффициенты в разложениях V, T и F носят специальное название, а именно: c_{rs} называются *коэффициентами восстановления* или *квазиупругими коэффициентами*; a_{rs} — *коэффициентами инерции* и $\varkappa_{rs}$ — *коэффициентами сопротивления*.

Принимая во внимание равенство (13), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\dot{q}_s; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\ddot{q}_s; \qquad \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0.$$

Кроме того, из равенств (2) и (12′) находим

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{s=1}^{n} \varkappa_{rs}\dot{q}_s; \qquad \frac{\partial V}{\partial q_r} = \sum_{s=1}^{n} c_{rs}q_s.$$

Подставляя эти выражения в уравнения движения (4), получим уравнения малых движений системы вблизи положения равновесия

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{rs}\ddot{q}_s + \varkappa_{rs}\dot{q}_s + c_{rs}q_s) = 0 \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{14}$$

Таким образом, уравнения малых движений системы вблизи положения равновесия представляют собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно n неизвестных координат q. Проинтегрировав эту систему, мы найдем координаты q в функции времени и $2n$ произвольных постоянных, определяемых начальными условиями.

3. Интегрирование уравнений движения. Как известно, линейные однородные уравнения, а таковыми и являются уравнения малых движений (14), интегрируются подстановкой

$$q_s = A_s e^{\lambda t},$$

где A_s и λ суть постоянные величины. Подставляя эти выражения координат в уравнения движения (14), получим

$$\sum_{s=1}^{n} A_s(a_{rs}\lambda^2 + \varkappa_{rs}\lambda + c_{rs}) = 0 \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{15}$$

т. е. систему n однородных линейных уравнений относительно A_s. Известно, что система однородных линейных уравнений, в которой

число неизвестных равно числу уравнений, дает решения, отличные от нуля только в том случае, если определитель системы равен нулю, т. е. если

$$\Delta(\lambda) \equiv \| a_{rs}\lambda^2 + \varkappa_{rs}\lambda + c_{rs} \| = 0, \tag{16}$$

или, в развернутом виде,

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2+\varkappa_{11}\lambda+c_{11} & a_{12}\lambda^2+\varkappa_{12}\lambda+c_{12} & \ldots & a_{1n}\lambda^2+\varkappa_{1n}\lambda+c_{1n} \\ a_{21}\lambda^2+\varkappa_{21}\lambda+c_{21} & a_{22}\lambda^2+\varkappa_{22}\lambda+c_{22} & \ldots & a_{2n}\lambda^2+\varkappa_{2n}\lambda+c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\lambda^2+\varkappa_{n1}\lambda+c_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn}\lambda^2+\varkappa_{nn}\lambda+c_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение (16) есть уравнение степени $2n$ относительно λ; оно называется *характеристическим* или *уравнением частот*. Решая его, найдем $2n$ значений λ, называемых собственными значениями. Подставляя какое-либо из этих значений λ_α в уравнения (15), мы определим одну из систем решений этих однородных уравнений, т. е. n значений множителей A^α, которые обозначим через

$$A_1^\alpha,\ A_2^\alpha,\ \ldots,\ A_n^\alpha.$$

Эти значения множителей A пропорциональны некоторой произвольной постоянной, которая является постоянной интегрирования, так как из теории однородных линейных уравнений известно, что если им удовлетворяет некоторая система решений, то им удовлетворяет и всякая иная система, полученная из первой путем умножения ее решений на какое-либо число. Таких систем значений множителей A будем иметь столько, сколько корней имеет характеристическое уравнение, т. е. $2n$. Каждая из этих систем, определяемая индексом α, включает в себя произвольную постоянную; число этих произвольных постоянных равно $2n$, т. е. их столько, сколько и должно содержаться в общем решении системы (14). Число всех значений A будет, очевидно, $2n^2$. Тогда, согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений, найдем окончательно для координат точек системы следующие выражения:

$$q_s = \sum_{\alpha=1}^{2n} A_s^\alpha e^{\lambda_\alpha t} \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{17}$$

Вид функций q_s, а следовательно и характер малых движений, определяется свойством корней уравнения частот λ_α.

4. Исследование корней и характер малых движений. Свойство корней характеристического уравнения дает возможность судить не только о характере малых движений, но и о характере равновесия системы.

Чтобы получить выражение, удобное для исследования характера движения в зависимости от вида корней уравнения частот, рассмотрим какой-нибудь корень уравнения (16), который для общности будем предполагать комплексным; пусть этот корень будет $\lambda = \mu + i\nu$, а корень, ему сопряженный, $\lambda' = \mu - i\nu$. Тогда множители A, соответствующие корню λ, будут, вообще говоря, комплексные вида

$$A_s = \alpha_s + i\beta_s.$$

Так как уравнения (15), которым удовлетворяют значения A, линейные, однородные и с действительными коэффициентами, то множители A, соответствующие сопряженному корню λ', будут комплексными и сопряженными A_s, т. е. будут иметь вид

$$A'_s = \alpha_s - i\beta_s.$$

Умножим каждое из уравнений системы (15), т. е. уравнения

$$\sum_{s=1}^{n} A_s (a_{rs}\lambda^2 + \varkappa_{rs}\lambda + c_{rs}) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

на A'_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ и сложим полученные выражения почленно; будем иметь

$$\lambda^2 \sum_{r,s} a_{rs} A'_r A_s + \lambda \sum_{r,s} \varkappa_{rs} A'_r A_s + \sum_{r,s} c_{rs} A'_r A_s = 0. \tag{18}$$

Так как

$$a_{rs} = a_{sr}, \qquad \varkappa_{rs} = \varkappa_{sr}, \qquad c_{rs} = c_{sr},$$

то множители при коэффициентах a_{rs}, $\varkappa_{rs}$, c_{rs} в двойных суммах имеют вид

$$A_r A'_s + A_s A'_r;$$

подставляя вместо A их комплексные выражения, получим

$$A_r A'_s + A_s A'_r = (\alpha_r + i\beta_r)(\alpha_s - i\beta_s) + (\alpha_s + i\beta_s)(\alpha_r - i\beta_r) = 2(\alpha_r\alpha_s + \beta_r\beta_s). \tag{19}$$

Следовательно, квадратное уравнение (18) будет иметь действительные коэффициенты и примет вид

$$\lambda^2 \sum_{r,s} a_{rs}(\alpha_r\alpha_s + \beta_r\beta_s) + \lambda \sum_{r,s} \varkappa_{rs}(\alpha_r\alpha_s + \beta_r\beta_s) + \sum_{r,s} c_{rs}(\alpha_r\alpha_s + \beta_r\beta_s) = 0. \tag{20}$$

Принимая во внимание, что функции

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,s} a_{rs}\dot q_r \dot q_s, \qquad F = \frac{1}{2}\sum_{r,s} \varkappa_{rs}\dot q_r \dot q_s, \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{r,s} c_{rs} q_r q_s$$

представляют собой квадратичные формы, легко видеть, что двойные суммы в коэффициентах квадратного уравнения (20) являются теми же

квадратичными формами, но выраженными в переменных α и β, т. е.

$$\sum_{r,s} a_{rs}\alpha_r\alpha_s = 2T(\alpha), \quad \sum_{r,s} \varkappa_{rs}\alpha_r\alpha_s = 2F(\alpha), \quad \sum_{r,s} c_{rs}\alpha_r\alpha_s = 2V(\alpha),$$
$$\sum_{r,s} a_{rs}\beta_r\beta_s = 2T(\beta), \quad \sum_{r,s} \varkappa_{rs}\beta_r\beta_s = 2F(\beta), \quad \sum_{r,s} c_{rs}\beta_r\beta_s = 2V(\beta).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (20), получим

$$\lambda^2 [T(\alpha) + T(\beta)] + \lambda [F(\alpha) + F(\beta)] + V(\alpha) + V(\beta) = 0, \tag{21}$$

откуда

$$\lambda = \frac{-[F(\alpha) + F(\beta)] \pm \sqrt{[F(\alpha) + F(\beta)]^2 - 4[T(\alpha) + T(\beta)][V(\alpha) + V(\beta)]}}{2[T(\alpha) + T(\beta)]}.$$

В зависимости от дискриминанта левой части уравнения (21)

$$\Delta = 4[T(\alpha) + T(\beta)][V(\alpha) + V(\beta)] - [F(\alpha) + F(\beta)]^2 \tag{22}$$

корни уравнения (21) могут быть трех видов:

1) если $\Delta > 0$, то корни комплексные.
2) „ $\Delta < 0$ „ „ действительные и различные,
3) „ $\Delta = 0$ „ „ действительные и равные.

Таким образом, вид корней λ зависит от знака дискриминанта Δ.

Так как кинетическая энергия T всегда положительна, то квадратичная форма $T = \frac{1}{2}\sum_{r,s} a_{rs}\dot q_r \dot q_s$ будет определенной положительной формой, т. е. будет положительной при любом действительном значении переменных; поэтому $T(\alpha) > 0$, $T(\beta) > 0$. То же самое относится и к функции рассеяния $F = \frac{1}{2}\sum_{r,s} \varkappa_{rs}\dot q_r \dot q_s$. Что же касается потенциальной энергии $V = \frac{1}{2}\sum_{r,s} c_{rs} q_r q_s$, то эта функция может быть и положительной, и отрицательной и, следовательно, не является определенной квадратичной формой. Поэтому ясно, что от знака функции V (т. е. потенциальной энергии) и зависит главным образом характер малых движений системы в расположенной вблизи конфигурации равновесия малой области D, а также характер и самого равновесия системы. Могут быть три основных случая: 1) когда в области D будет $V < 0$; поскольку мы приняли, что в положении равновесия $V = V_0 = 0$, то, следовательно, в этом случае потенциальная энергия системы имеет в положении равновесия максимум; 2) когда в области D будет $V > 0$, т. е. когда потенциальная энергия системы имеет в положении равновесия минимум; 3) когда в области D значение V может быть и больше и меньше нуля, т. е.

в положении равновесия потенциальная энергия будет ни maximum, ни minimum (так называемый minimax). Мы ограничимся исследованием только первых двух случаев:

I. $V<0$; тогда $\Delta<0$ и, следовательно, корни квадратного трехчлена действительные и различные. Из выражения для корней λ следует, что они будут положительными, если квадратный корень взять со знаком плюс, и, наоборот, отрицательными, если квадратный корень взять со знаком минус. Тогда в равенствах (17), определяющих значения координат q_s, множители $e^{\lambda_\alpha t}$, для которых $\lambda_\alpha>0$, будут со временем неограниченно возрастать и, следовательно, система будет все больше и больше удаляться от положения равновесия. Равновесие системы в этом случае называют неустойчивым.

Таким образом, если потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет максимум, то равновесие системы в этом положении будет неустойчивым (по первому приближению). Если такую систему вывести из положения равновесия, то вначале, вблизи положения равновесия, ее движение будет апериодическим (т. е. не колебательным). О характере последующего движения системы по первому приближению здесь, конечно, судить нельзя.

II. $V>0$. В этом случае малые движения системы носят различный характер в зависимости от того, будет ли сопротивление среды очень велико, очень мало или равно нулю; каждый из этих случаев рассмотрим в отдельности:

1) Сопротивление велико настолько, что $F^2>4VT$ и при этом $\Delta<0$; тогда корни λ квадратного трехчлена будут действительными и отрицательными.

В этом случае в равенствах (17) все $e^{\lambda_s t}<1$ и со временем неограниченно убывают, стремясь к нулевым значениям; система при этом асимптотически возвращается в равновесное положение. Состояние равновесия, для которого это имеет место, называют устойчивым.

2) Сопротивление настолько мало, что $F^2<4VT$ и $\Delta>0$; тогда корни квадратного трехчлена будут комплексные и сопряженные вида

$$\lambda_\alpha=\mu_\alpha\pm i\nu_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Докажем, что вещественная часть корней μ_α отрицательна. По известному свойству корней квадратного уравнения будем иметь из уравнения (21)

$$\lambda+\lambda'=2\mu=-\frac{F(\alpha)+F(\beta)}{T(\alpha)+T(\beta)}.$$

Так как функции F и T положительны, то из полученного соотношения заключаем, что $\mu<0$. Принимая во внимание доказанное,

можем корень λ_α представить в виде

$$\lambda_\alpha=-\mu_\alpha\pm i\nu_\alpha,$$

где μ_α суть числа только положительные. В таком случае выражения для координат q_s в равенствах (17) будут следующими:

$$q_s=\sum_{\alpha=1}^{n} e^{-\mu_\alpha t}\left[A_s^\alpha e^{i\nu_\alpha t}+A_s^\alpha e^{-i\nu_\alpha t}\right] \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{23}$$

Делая известные преобразования, можно вместо показательных функций мнимого аргумента ввести функции тригонометрические; тогда получим

$$q_s=\sum_{\alpha=1}^{n} e^{-\mu_\alpha t}\left[a_s^\alpha\cos(\nu_\alpha t)+b_s^\alpha\sin(\nu_\alpha t)\right] \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{23'}$$

Равновесие системы здесь также будет устойчивым, а ее малые движения вблизи положения равновесия представляют собой затухающие колебания.

Резюмируя оба случая, можем сказать, что если потенциальная энергия системы имеет в положении равновесия минимум, то равновесие системы в данном положении будет устойчивым. Если такой системе сообщить небольшое возмущение, то она будет стремиться вернуться в положение равновесия. Возникающие при этом малые движения будут апериодическими, если сопротивление среды велико, или затухающими колебаниями, если сопротивление среды мало.

3) $F=0$ (сопротивление отсутствует). В этом случае, полагая в уравнении (21) $F=0$, найдем, что

$$\lambda=\pm\sqrt{-\frac{V(\alpha)+V(\beta)}{T(\alpha)+T(\beta)}},$$

а так как $V>0$ и $T>0$, то корни λ будут мнимыми, т. е. будут иметь вид

$$\lambda_\alpha=\pm ik_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда из уравнений (17) найдем следующие выражения для координат q_s:

$$q_s=\sum_{\alpha=1}^{n}\left[a_s^\alpha\cos(k_\alpha t)+b_s^\alpha\sin(k_\alpha t)\right] \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{24}$$

или, преобразуя выражение в квадратных скобках обычным способом:

$$q_s=\sum_{\alpha=1}^{n} B_s^\alpha\sin\left(k_\alpha t+\beta_s^\alpha\right) \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{24'}$$

Поскольку координаты всех точек системы могут быть выражены через q_s, то, следовательно, точки системы совершают в этом случае около их положений равновесия сложные незатухающие колебания, являющиеся в общем случае результатом суперпозиции n простых колебаний с разными частотами k_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$). При этом, так как начальные возмущения считаются малыми, система во все время движения остается вблизи ее конфигурации равновесия. Равновесие системы в этом случае также называют устойчивым (по первому приближению).

Однако может случиться, что некоторые корни окажутся равными между собой, например $\lambda_m = \lambda_n$; в таком случае будут равны и частоты соответствующих колебаний. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение, соответствующее корню второй кратности, каковым является $\lambda_{m,\,n}$, будет иметь вид

$$\left(A_s^m + A_s^n t\right) e^{\lambda_{m,\,n} t}.$$

На этом основании Лагранж полагал, что в этом случае равновесие будет неустойчивым, так как при $t \to \infty$ член $A^n t$ также стремится к бесконечности.

Эта ошибка держалась долгое время, пока Вейерштрасс не обнаружил, что это не так. В 1858 г. он доказал, что в этом случае имеет место тождественность двух или большего числа уравнений (15) в зависимости от кратности корня; следовательно, корень фактически остается первой кратности, и тогда отпадает решение, соответствующее кратному корню, а вместе с тем и заключение Лагранжа. Вейерштрасс пришел к этому на основании теории квадратичных форм, каковыми являются выражения кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,\,s} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{r,\,s} c_{rs}q_r q_s.$$

Согласно теории квадратичных форм написанные квадратичные формы всегда можно привести к каноническому виду, т. е. к виду, содержащему скорости и координаты только в квадратах. Эта задача равносильна задаче об отыскании главных осей поверхности второго порядка или, что то же, главных направлений тензора.

5. Нормальные координаты. В общей теории квадратичных форм доказывается, что если одна из квадратичных форм T или V является определенной (а в данном случае определенной положительной формой является T), то всегда можно найти такое линейное преобразование координат

$$q_s = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{si}\xi_i \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

что T и V одновременно преобразуются к каноническому виду

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^0\dot{\xi}_i^2, \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^0\xi_i^2, \tag{25}$$

где a_i^0 и c_i^0 суть коэффициенты, полученные в результате преобразования[1]).

Уравнения Лагранжа для координат ξ_i в случае отсутствия сопротивления ($F = 0$) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \frac{\partial V}{\partial \xi_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или, после подстановки выражений T и V из равенств (25),

$$a_i^0\ddot{\xi}_i + c_i^0\xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Интегрируя эти уравнения, найдем

$$\xi_i = A_i\cos(k_i t) + B_i\sin(k_i t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$k_i = \sqrt{\frac{c_i^0}{a_i^0}}.$$

Координаты ξ_i называются *главными* или *нормальными координатами*. Из полученных для ξ_i выражений следует, что каждая нормальная координата будет совершать гармоническое колебание со своей собственной частотой; другие же координаты, являясь линейными функциями нормальных, будут иметь сложные колебания как результат наложения n простых, что мы и имели прежде. Здесь с особенной ясностью обнаруживается тот факт, что если несколько корней, например два, между собой равны, то соответствующие им нормальные координаты имеют одинаковые частоты; при этом имеет место только явление унисона и не происходит бесконечного возрастания координат. Ясно также, что в системе уравнений (26), а следовательно, и в системе уравнений (15) уравнения, соответствующие равным корням k_i, будут тождественны.

6. Двойной физический маятник. Рассмотрим, как конкретно исследуются малые колебания системы около положения устойчивого равновесия на примере двойного физического маятника, состоящего из двух однородных стержней OA и AB одинаковой длины l и массы m, соединенных в точке A шарниром (рис. 38). Стержни могут совершать колебания в вертикальной плоскости Oxy. Трением в осях и сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1 и φ_2, которые стержни образуют с вертикалью. Нетрудно убедиться, что у системы будет четыре положения равновесия:

$$1)\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0;\ 2)\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi;\ 3)\ \varphi_1 = \pi,\ \varphi_2 = 0;\ 4)\ \varphi_1 = \pi,\ \varphi_2 = \pi.$$

[1]) См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. I, изд. 7, 1956, стр. 137—138.

При этом только для первого потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум и равновесие будет устойчивым. Исследуем малые колебания системы около этого положения равновесия. Для этого, считая φ_1 и φ_2 малыми, вычислим кинетическую T и потенциальную V энергии системы, сохраняя в них члены второго порядка малости. Имеем

$$T=\frac{1}{2}J_1\dot\varphi_1^2+\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_{2C}\dot\varphi_2^2,$$

где $J_1=\dfrac{ml^2}{3}$ — момент инерции стержня OA относительно оси O, $J_{2C}=\dfrac{ml^2}{12}$ — момент инерции стержня AB относительно его центра масс C и v_C — скорость этого центра масс. При этом (см. рис. 38) $\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_C'$, где численно $v_1=l\dot\varphi_1$, $v_C'=\dfrac{l}{2}\dot\varphi_2$. Следовательно,

$$v_C^2=l^2\dot\varphi_1^2+\frac{l^2}{4}\dot\varphi_2^2+l^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1).$$

Поскольку в выражении T сохраняются только члены второго порядка малости, то, учитывая, что $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1-\dfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)^2+\ldots$, получим окончательно

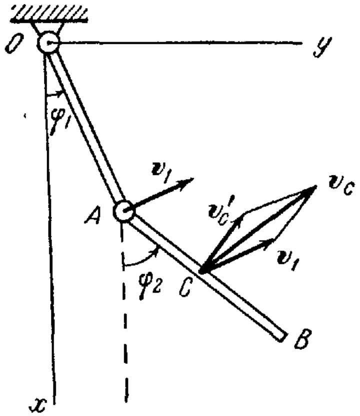


Рис. 38.

$$T=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}ml^2\dot\varphi_1^2+ml^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2+\frac{ml^2}{3}\dot\varphi_2^2\right]$$

или, по аналогии с формулой (13),

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot\varphi_1^2+2a_{12}\dot\varphi_1\dot\varphi_2+a_{22}\dot\varphi_2^2\right), \tag{27}$$

где

$$a_{11}=\frac{4ml^2}{3},\quad a_{12}=\frac{ml^2}{2},\quad a_{22}=\frac{ml^2}{3}. \tag{27'}$$

Для потенциальной энергии, если ее считать в положении равновесия равной нулю, будем иметь

$$V=mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi_1)+mg\left[l(1-\cos\varphi_1)+\frac{l}{2}(1-\cos\varphi_2)\right].$$

Замечая, что $\cos\varphi_1=1-\dfrac{1}{2}\varphi_1^2+\ldots$, $\cos\varphi_2=1-\dfrac{1}{2}\varphi_2^2+\ldots$, найдем, сохраняя члены второго порядка малости,

$$V=\frac{3}{4}mgl\varphi_1^2+\frac{1}{4}mgl\varphi_2^2$$

или по аналогии с формулой (12')

$$V=\frac{1}{2}\left(c_{11}\varphi_1^2+2c_{12}\varphi_1\varphi_2+c_{22}\varphi_2^2\right), \tag{28}$$

где

$$c_{11}=\frac{3}{2}mgl,\quad c_{12}=0,\quad c_{22}=\frac{1}{2}mgl. \tag{28'}$$

Составляя теперь для рассматриваемой системы уравнения Лагранжа (4), найдем по аналогии с (14) следующие дифференциальные уравнения малых колебаний системы:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}\ddot\varphi_1+a_{12}\ddot\varphi_2+c_{11}\varphi_1+c_{12}\varphi_2=0,\\ a_{12}\ddot\varphi_1+a_{22}\ddot\varphi_2+c_{12}\varphi_1+c_{22}\varphi_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

В рассматриваемом нами случае $V>0$ (потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум) и $F=0$ (сопротивление отсутствует). Следовательно, по доказанному в п. 4 корни уравнения частот будут чисто мнимыми и общее решение должно иметь вид (24'). Поэтому для упрощения выкладок решение уравнений (29) можно сразу искать в виде

$$\varphi_1=B_1\sin(kt+\beta),\quad \varphi_2=B_2\sin(kt+\beta). \tag{30}$$

Подставляя эти значения φ_1 и φ_2 в уравнения (29), получим следующие два однородных уравнения для определения B_1 и B_2:

$$\left.\begin{aligned}(c_{11}-a_{11}k^2)B_1+(c_{12}-a_{12}k^2)B_2=0,\\ (c_{12}-a_{12}k^2)B_1+(c_{22}-a_{22}k^2)B_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, находим для отыскания k следующее уравнение частот:

$$\Delta(k)\equiv\begin{vmatrix}(c_{11}-a_{11}k^2) & (c_{12}-a_{12}k^2)\\ (c_{12}-a_{12}k^2) & (c_{22}-a_{22}k^2)\end{vmatrix}=0 \tag{32}$$

или

$$(c_{11}-a_{12}k^2)(c_{22}-a_{22}k^2)-(c_{12}-a_{12}k^2)^2=0. \tag{32'}$$

Решая это биквадратное уравнение при значениях коэффициентов, даваемых равенствами (27') и (28'), получим

$$k_1^2=3\frac{g}{l}\left(1-\frac{2}{7}\sqrt{7}\right),\quad k_2^2=3\frac{g}{l}\left(1+\frac{2}{7}\sqrt{7}\right),$$

откуда

$$k_1=0{,}86\sqrt{\frac{g}{l}},\quad k_2=2{,}30\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{33}$$

В результате находим два частных линейно независимых решения уравнений (29), соответствующих частотам k_1 и k_2:

а) первое решение

$$\varphi_1^{(1)}=B_1^{(1)}\sin(k_1t+\beta_1),\quad \varphi_2^{(1)}=B_2^{(1)}\sin(k_1t+\beta_1); \tag{34}$$

б) второе решение

$$\varphi_1^{(2)}=B_1^{(2)}\sin(k_2t+\beta_2),\quad \varphi_2^{(2)}=B_2^{(2)}\sin(k_2t+\beta_2). \tag{35}$$

Два гармонических колебания, определяемых уравнениями (34) и (35), называют *главными колебаниями*, а их частоты k_1 и k_2 — *собственными ча-*

стотами системы; при этом колебание с меньшей из частот, т. е. с частотой k_1, называют *первым главным колебанием*, а колебание с частотой k_2 — *вторым главным колебанием*.

На постоянные β_1 и β_2 никаких ограничений не накладывается; следовательно, это произвольные постоянные. Постоянные же $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$ и $B_1^{(2)}$, $B_2^{(2)}$ должны удовлетворять уравнениям (31) соответственно при $k=k_1$ и $k=k_2$. Полагая в (31) $k=k_1$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\left(c_{11}-a_{11}k_1^2\right)B_1^{(1)}+\left(c_{12}-a_{12}k_1^2\right)B_2^{(1)}=0,\\ \left(c_{12}-a_{12}k_1^2\right)B_1^{(1)}+\left(c_{22}-a_{22}k_1^2\right)B_2^{(1)}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(36)$$

Так как определитель (32) этой системы при $k=k_1$ обращается в нуль, то одно из уравнений (36) является следствием другого. Тогда, считая, например, $B_1^{(1)}=B_1$, где B_1 — произвольная постоянная, найдем, что

$$B_2^{(1)}=-\frac{c_{11}-a_{11}k_1^2}{c_{12}-a_{12}k_1^2}B_1.$$

Аналогичный результат получим для $B_1^{(2)}$ и $B_2^{(2)}$, полагая в уравнениях (31) $k=k_2$. Введем обозначения

$$n_1=-\frac{c_{11}-a_{11}k_1^2}{c_{12}-a_{12}k_1^2},\quad n_2=-\frac{c_{11}-a_{11}k_2^2}{c_{12}-a_{12}k_2^2}.\qquad(37)$$

Тогда

$$B_1^{(1)}=B_1,\quad B_1^{(2)}=n_1B_1;\quad B_2^{(1)}=B_2;\quad B_2^{(2)}=n_2B_2\qquad(38)$$

и решения (34), (35) примут вид:

а) для первого главного колебания

$$\varphi_1^{(1)}=B_1\sin(k_1t+\beta_1),\quad \varphi_2^{(1)}=n_1B_1\sin(k_1t+\beta_1),\qquad(39)$$

б) для второго главного колебания

$$\varphi_1^{(2)}=B_2\sin(k_2t+\beta_2),\quad \varphi_2^{(2)}=n_2B_2\sin(k_2t+\beta_2),\qquad(40)$$

где B_1, β_1, B_2, β_2 — произвольные постоянные.

Общее решение системы дифференциальных уравнений (29), содержащее указанные четыре произвольные постоянные, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=B_1\sin(k_1t+\beta_1)+B_2\sin(k_2t+\beta_2),\\ \varphi_2&=n_1B_1\sin(k_1t+\beta_1)+n_2B_2\sin(k_2t+\beta_2).\end{aligned}\right\}\qquad(41)$$

Решение (41) и определяет закон сложных незатухающих малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия при произвольных начальных условиях. Мы видим, что колебания могут быть всегда представлены как результат наложения двух главных колебаний.

При соответствующих начальных условиях система может совершать одно из главных колебаний в чистом виде: первое главное колебание при $B_2=0$ или второе главное колебание при $B_1=0$. Амплитуды каждого из главных колебаний зависят от произвольных постоянных B_1 или B_2, определяемых по начальным условиям. Однако отношения этих амплитуд, равные соответственно для первого главного колебания n_1, а для второго главного колебания n_2, как видно из равенств (37), от начальных условий не зависят.

Числа n_1 и n_2, определяющие отношения амплитуд или отношения координат φ_1 и φ_2 при главных колебаниях, называются *коэффициентами формы* этих колебаний.

В рассматриваемой задаче при значениях коэффициентов a_{rs}, c_{rs} и частот, даваемых равенствами (27′), (28′) и (33), коэффициенты формы будут равны

$$n_1=\frac{c_{11}-a_{11}k_1^2}{a_{12}k_1^2}=1{,}43,$$

$$n_2=\frac{c_{11}-a_{11}k_2^2}{a_{12}k_2^2}=-2{,}10.$$

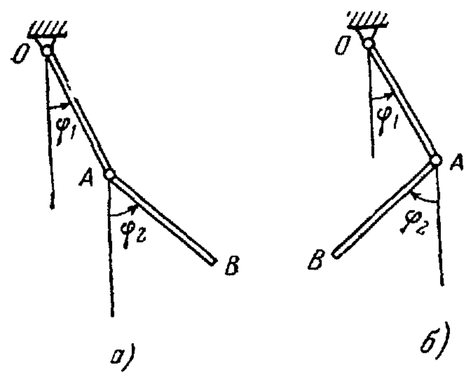


Рис. 39.

Знаки коэффициентов n_1 и n_2 в данном случае оказались разными. Отсюда следует, что если система будет совершать одно из главных колебаний, то при первом главном колебании (колебании с меньшей частотой k_1) стержни в любой момент времени будут отклонены от вертикали в одну и ту же сторону (рис. 39, *а*), а при втором главном колебании с частотой k_2 — в разные стороны (рис. 39, *б*).

§ 10. Устойчивость равновесия. Теорема Дирихле

1. Понятие об устойчивости равновесия. При изучении малых движений системы около положения равновесия мы столкнулись с понятием об устойчивости равновесия, смысл которого сводится к следующему. Допустим, что механическая система в некотором положении (конфигурации) находится под действием приложенных к ней сил в равновесии. Если эту систему вывести из положения равновесия, сообщив ее точкам достаточно малые начальные смещения и начальные скорости, то в последующем движении точки системы могут или оставаться все время вблизи их положений равновесия, или все более и более удаляться от этих положений; в первом случае рассматриваемое положение равновесия называется устойчивым, а во втором — неустойчивым.

Определим эти понятия более строго. Пусть система имеет n степеней свободы. Не нарушая общности, можно, во-первых, сделать все обобщенные координаты и обобщенные скорости безразмерными, отнеся каждую из них к соответствующей, характерной для данной координаты (или скорости) величине, и, во-вторых, как мы уже делали, отсчитывать все обобщенные координаты системы q_r от конфигурации равновесия O, полагая для этой конфигурации $q_r=0$ ($r=1, 2, \ldots, n$).

Допустим, что в некоторый момент времени t_0 система выведена из конфигурации равновесия; ее обобщенные координаты и скорости в этот момент обозначим через q_{r0} и $\dot{q}_{r0}$. Тогда равновесие системы в конфигурации O называется устойчивым (по Ляпунову), если, задав любое сколь угодно малое число $\rho > 0$, можно указать такое число $\eta(\rho) > 0$, что при

$$|q_{r0}| \leqslant \eta \quad \text{и} \quad |\dot{q}_{r0}| \leqslant \eta \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

в любой момент времени $t > t_0$ будет

$$|q_r| < \rho \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

В противном случае равновесие системы в конфигурации O называется неустойчивым.

Равенства $|q_r| = \rho$ определяют вблизи конфигурации равновесия O некоторую область D (в n-мерном пространстве). Если равновесие в конфигурации O устойчиво, то при малых возмущениях система, выведенная из состояния равновесия, будет двигаться, оставаясь все время в области D.

В § 9 мы видели, как можно исследовать вопрос об устойчивости равновесия (по первому приближению), рассматривая малые движения системы вблизи положения равновесия; этот метод применим и к системам, не находящимся под действием потенциальных сил.

В случае консервативных систем вопрос об устойчивости равновесия можно исследовать непосредственно, зная потенциальную энергию системы.

2. Теорема Лежен Дирихле. Для равновесия консервативной системы со склерономными связями необходимо и достаточно выполнение условия $\delta V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$, где V — потенциальная энергия системы. Однако по этому условию нельзя судить о характере равновесия.

Достаточное (но не необходимое) условие равновесия консервативной системы со склерономными связями дает следующая теорема Лежен Дирихле: *если для какой-либо конфигурации консервативной системы со склерономными связями потенциальная энергия V имеет* минимум (*а следовательно, силовая функция $U = -V$ имеет* максимум), *то равновесие системы устойчиво.*

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть для конфигурации равновесия O (т. е. при $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$) потенциальная энергия V равна нулю (что всегда можно сделать, так как потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной) и имеет минимум; тогда всегда можно найти такое достаточно малое число ρ, чтобы в области $D(|q| \leqq \rho)$ потенциальная энергия V была положительна.

Пусть, далее, какая-либо обобщенная координата системы, например q_r, принимает предельное значение $|q_r| = \rho$, а все остальные координаты принимают любые значения, по абсолютной величине не превышающие ρ или равные ρ. Пусть P_r есть значение потенциальной энергии в этом случае. Тогда для системы с n степенями свободы существует n положительных чисел $P_1, P_2, \ldots, P_n$, получаемых как значения потенциальной энергии $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, если последовательно приравнивать модули обобщенных координат числу ρ. Таким образом,

$$P_1 = V(\rho, \underbrace{q_2, q_3, \ldots, q_n}_{\text{любые в области } D}),$$

$$P_2 = V(q_1, \rho, q_3, \ldots, q_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n = V(\underbrace{q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}}_{\text{любые в области } D}, \rho).$$

Пусть наименьшее из чисел $P_1, P_2, \ldots, P_n$ есть P; тогда обязательно $V(q_1, \ldots, q_n) \geqslant P$, как только одна из обобщенных координат достигнет по модулю значения, равного ρ, а все другие координаты будут принимать любые значения в области D. Отклоним систему от положения равновесия, давая координатам q_r значения q_{r0} по модулю, меньшие ρ, и сообщим точкам системы начальные скорости $v_{10}, v_{20}, \ldots, v_{n0}$. Тогда система придет в движение, и поскольку она консервативна и склерономна, будет иметь место интеграл энергии

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{2} + V = \sum \frac{m_i v_{i0}^2}{2} + V_0$$

или

$$T + V = T_0 + V_0,$$

откуда

$$T = (T_0 + V_0) - V.$$

Но поскольку всегда $T > 0$, то, следовательно, в любой момент движения

$$V < T_0 + V_0. \tag{3}$$

Так как в области D потенциальная энергия положительна, сумма $(T_0 + V_0)$ непременно положительна, и вследствие непрерывности T_0, V_0 эту сумму можно сделать сколь угодно малой. Иначе говоря, можно найти число η, меньшее ρ, такое, что при $|q_{r0}| < \eta$ и $|\dot{q}_{r0}| < \eta$ будет иметь место следующее неравенство:

$$(T_0 + V_0) < P\,[1].$$

[1] Чтобы удовлетворить этому неравенству, достаточно, например, выбрать такие q_{r0} и $\dot{q}_{r0}$, чтобы было $T_0 < \frac{P}{2}$ и $V_0 < \frac{P}{2}$.

Тогда из неравенства (3) следует, что в любой момент движения

$$P - V > 0. \tag{4}$$

Поскольку начальные значения обобщенных координат лежат внутри области D, то из (4) мы видим, что ни одна из координат q_r не может во время движения достигнуть значения ρ (т. е. система не может выйти из области D), так как тогда разность $(P - V)$ становилась бы отрицательной, что невозможно.

Следовательно, конфигурация равновесия системы устойчива.

Теорема, противоположная теореме Лежен Дирихле, формулируется так: *если для некоторой конфигурации консервативной системы потенциальная энергия V имеет стационарное значение и не есть минимум, то равновесие системы неустойчиво.* Эта теорема может быть доказана только с некоторыми ограничениями. Ляпунов доказал две теоремы, устанавливающие критерии неустойчивости равновесия консервативной системы, которыми практически охватываются все возможные случаи. Первая теорема относится к случаю, когда разложение потенциальной энергии в ряд вблизи положения равновесия [см. ряд (12) в § 9] начинается с членов второго порядка. Эта теорема гласит: *если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума, причем отсутствие минимума устанавливается по разложению потенциальной энергии в ряд, в котором сохранены только члены второго порядка, то равновесие системы неустойчиво.* Вторая теорема устанавливает критерий неустойчивости для случая, когда разложение потенциальной энергии в ряд начинается с членов третьего или более высокого порядка. Она гласит: *если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия максимум, причем наличие максимума устанавливается по разложению потенциальной энергии в ряд, в котором сохранены члены наименьшего порядка, не обратившиеся в нули, то равновесие системы неустойчиво.*

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 11. Геометрия масс

1. Понятие о твердом теле. Как известно, система материальных точек (частиц), в которой расстояния между двумя любыми точками остаются постоянными, называется неизменяемой системой. Если же, кроме того, точки системы расположены непрерывно, т. е. заполняют область пространства, занятую системой, сплошным образом, то такая неизменяемая система называется абсолютно твердым телом. Абсолютно твердое тело, согласно определению, не может подвергаться никаким деформациям и представляет собой идеальный образ, который тем ближе подходит к реальному твердому телу, чем меньше последнее способно деформироваться под действием сил.

Благодаря неизменяемости расстояний между своими частицами, абсолютно твердое тело представляет собой механическую систему, отличающуюся по сравнению с другими системами особыми свойствами, вследствие чего динамика твердого тела выделяется в особую главу, тем более, что эта глава динамики имеет большое значение в технических приложениях. В конце главы I было указано, что для определения движения неизменяемой системы достаточно уравнений, которые дают теоремы об изменении количества движения и кинетического момента системы, поэтому уравнения движения абсолютно твердого тела представляют собой развитие этих уравнений.

2. Характеристики распределения масс. В динамике абсолютно твердого тела играют большую роль величины, характеризующие распределение масс в теле. Учение об этих величинах носит название геометрии масс.

Величины, характеризующие распределение масс в системе, носят название (не совсем удачное) моментов[1]). Момент представляет собой

[1]) Это понятие относится к любой механической системе. Но в случае абсолютно твердого тела для системы координат, связанной с этим телом, величины моментов будут постоянными и могут быть заранее определены как характеристики распределения масс в теле (см., например, § 2, п. 8).

сумму произведений масс всех точек системы на однородную функцию координат этих точек, т. е. имеет вид $\sum\limits_i m_i x_i^\alpha y_i^\beta z_i^\gamma$, причем $n=\alpha+\beta+\gamma$ называется степенью момента. Если массы распределены непрерывно и плотность тела ρ (отношение массы частицы тела к ее объему) есть непрерывная функция координат, т. е. $\rho=\rho(x, y, z)$, то момент выражается в виде объемного интеграла

$$\int\int\int \rho(x, y, z)\, x^\alpha y^\beta z^\gamma\, dx\, dy\, dz,$$

взятого по всему объему тела (если же функция ρ прерывна, то интеграл берется в смысле Стилтьеса). Когда тело однородно, плотность ρ от координат не зависит, и момен имеет вид

$$\rho\int\int\int x^\alpha y\ z^\gamma\, dx\, dy\, dz,$$

т. е. представляет собой произведение плотности на объемный интеграл от функции только координат, который будет уже чисто геометрической величиной; эту величину мы будем называть геометрическим моментом n-й степени. Таким образом, в случае однородного тела момент (физический) равен плотности, умноженной на геометрический момент.

В механике встречаются обыкновенно только моменты первой и второй степени; моментами высших степеней иногда пользуются в теории прочности.

3. Моменты первой степени. Моменты первой степени, называемые обычно *статическими моментами*, выражаются величинами $\sum\limits_i m_i \boldsymbol{r}_i$, где $\boldsymbol{r}_i$ есть радиус-вектор частицы с массой m_i. Это выражение представляет собой статический момент системы относительно центра O, служащего началом векторов $\boldsymbol{r}_i$. Известно, что

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = M\boldsymbol{r}_C,$$

где M есть масса всей системы, а $\boldsymbol{r}_C$ — радиус-вектор центра масс; поэтому, если центр O совпадает с центром масс, то статический момент $\sum\limits_i m_i \boldsymbol{r}_i$ обращается в нуль. Ясно, что

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = \sum_i m_i x_i \boldsymbol{i} + \sum_i m_i y_i \boldsymbol{j} + \sum_i m_i z_i \boldsymbol{k}.$$

Величины $\sum\limits_i m_i x_i$, $\sum\limits_i m_i y_i$, $\sum\limits_i m_i z_i$ представляют собой *статические моменты относительно координатных плоскостей* yz, zx, xy, причем

$$\sum_i m_i x_i = Mx_C, \quad \sum_i m_i y_i = My_C, \quad \sum_i m_i z_i = Mz_C,$$

где x_C, y_C, z_C суть координаты центра масс. Размерность статического момента равна произведению размерностей массы и длины. Если начало координат O совпадает с центром масс C, то статические моменты относительно координатных плоскостей будут, очевидно, также равны нулю.

4. Моменты второй степени. Моменты второй степени имеют вид:

$$J_{(yz)}=\sum mx^2, \qquad J_{(zx)}=\sum my^2, \qquad J_{(xy)}=\sum mz^2;$$
$$J_{yz}=\sum myz, \qquad J_{zx}=\sum mzx, \qquad J_{xy}=\sum mxy;$$
$$J_{xx}=\sum m(y^2+z^2), \quad J_{yy}=\sum m(z^2+x^2), \quad J_{zz}=\sum m(x^2+y^2);$$
$$J_O=\sum m(x^2+y^2+z^2)=\sum mr^2.$$

Первые три из них, представляющие суммы произведений масс на квадраты их расстояний соответственно до плоскостей yz, zx, xy, называются *моментами инерции относительно этих плоскостей*, вторые три называются *центробежными моментами* или *произведениями инерции*, три третьих, как суммы произведений из масс на квадраты их расстояний до осей x, y, z, — *моментами инерции относительно этих осей* или *осевыми моментами инерции*; наконец, последний, как сумма произведений из масс на квадрат их расстояний до точки O, — *моментом инерции относительно точки* O, или, иначе, *полярным моментом инерции* относительно этой точки. Из этих определений ясно, что:

1) Размерность момента второй степени равна произведению размерностей массы и квадрата длины. Единицей измерения этой величины в системе СИ будет 1 *нм*², а в технической системе единиц — 1 *кГ м сек*².

2) Сумма трех плоскостных моментов инерции равна полярному моменту инерции, т. е.

$$J_{(yz)}+J_{(zx)}+J_{(xy)}=J_O.$$

3) Сумма трех осевых моментов инерции равна удвоенному полярному моменту инерции, т. е.

$$J_{xx}+J_{yy}+J_{zz}=2J_O.$$

4) Сумма двух осевых моментов инерции всегда больше третьего, т. е.

$$J_{xx}+J_{yy}>J_{zz}, \quad J_{yy}+J_{zz}>J_{xx}, \quad J_{zz}+J_{xx}>J_{yy}.$$

В самом деле, так как

$$\sum m(y^2+z^2)+\sum m(z^2+x^2)=\sum m(x^2+y^2)+2\sum mz^2,$$

то

$$\sum m(y^2+z^2)+\sum m(z^2+x^2)>\sum m(x^2+y^2) \text{ и т. д.}$$

5. Момент инерции относительно оси. В динамике твердого тела из моментов второй степени преимущественно встречаются моменты инерции относительно оси (осевые) и произведения инерции. Как уже было сказано, моментом инерции системы относительно данной оси, например оси x, называется сумма произведений масс точек системы на квадраты их расстояний до этой оси, т. е. выражение вида $\sum m_i h_i^2$, где суммирование распространяется на все точки системы (см. § 2, п. 8). Если мы имеем сплошное абсолютно твердое тело, то масса элементарной частицы тела будет равна $\rho\, dv$, где ρ есть плотность тела, а dv — элемент объема; поэтому момент инерции относительно оси x в этом случае выразится (если ρ есть непрерывная функция координат) объемным интегралом, взятым по всему объему тела, т. е.

$$J_{xx} = \int \rho h^2\, dv = \int\int\int \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Если тело однородное, то ρ постоянно и может быть вынесено за знак интеграла, и мы получим

$$J_{xx} = \rho \int h^2\, dv,$$

где $\int h^2\, dv$ есть геометрический момент инерции объема, который, очевидно, имеет размерность (длина)^5 $\left[\text{размерность } \rho \text{ есть } \frac{\text{масса}}{(\text{длина})^3}\right]$.

Если тело представляет собой однородную тонкую пластину толщиной b ($b = \text{const}$), то, полагая $dv = b\, d\sigma$, где $d\sigma$ есть элемент площади пластины, будем иметь

$$J_{xx} = \rho b \int h^2\, d\sigma.$$

Здесь $\rho b = \rho'$ — поверхностная плотность (отношение массы элемента пластины к ее площади), а интеграл

$$\int h^2\, d\sigma = \int\int (y^2 + z^2)\, dy\, dz,$$

взятый по площади пластины, будет геометрическим моментом инерции площади; его размерность (длина)^4.

Точно так же в случае нахождения момента инерции однородного тонкого стержня с площадью поперечного сечения s ($s = \text{const}$), полагая $dv = s\, dl$, где dl — элемент длины стержня, найдем, что

$$J_{xx} = \rho s \int h^2\, dl.$$

Здесь $\rho s = \rho''$ — линейная плотность (отношение массы элемента стержня к его длине), а интеграл $\int h^2\, dl$, взятый вдоль отрезка

кривой (вдоль оси стержня), есть геометрический момент инерции отрезка линии, имеющий размерность (длина)^3. Таким образом, для вычисления осевых моментов инерции однородного тела, пластины или стержня нужно вычислить соответствующие геометрические моменты инерции, т. е. моменты инерции объема, площади или отрезка линии (что является задачей интегрального исчисления) и затем умножить найденную величину на соответственную плотность (т. е. объемную, поверхностную, линейную).

Заметим еще следующее. Пусть нужно вычислить момент инерции однородного призматического тела (т. е. тела, ограниченного поверхностью призмы или цилиндра и перпендикулярными к оси призмы сечениями) относительно оси x, параллельной образующей (рис. 40).

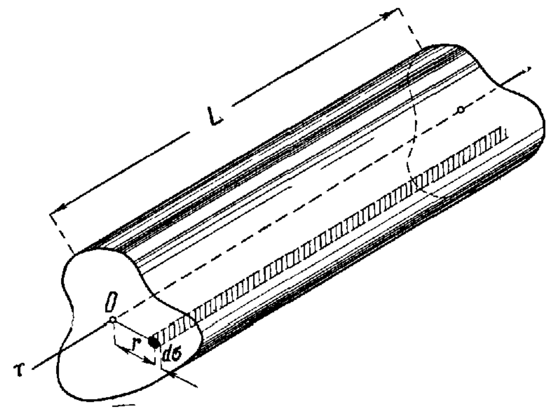


Рис. 40.

Задача, как мы видели, сводится к вычислению геометрического момента инерции объема этого тела относительно оси x, т. е. величины $\int h^2\, dv$. Возьмем за элемент объема объем волокна, площадь поперечного сечения которого равна $d\sigma$, а длина равна длине тела L; тогда $dv = L\, d\sigma$, и

$$\int h^2\, dv = L \int h^2\, d\sigma,$$

причем интеграл берется по всей площади поперечного сечения. Очевидно,

$$\int h^2\, d\sigma = J_O,$$

т. е. этот интеграл равен полярному моменту инерции площади поперечного сечения относительно точки O. Следовательно, геометрический момент инерции призматического тела относительно оси, параллельной образующей, равен LJ_O, т. е. произведению длины тела на полярный момент инерции площади поперечного сечения относительно точки пересечения оси с плоскостью этого сечения.

6. Радиус инерции. Момент инерции системы относительно какой-либо оси x можно выразить в виде

$$J_{xx}=\sum_i m_i h_i^2 = M\rho_{xx}^2,$$

где M — масса всей системы, а ρ_{xx} есть линейная величина, которая называется радиусом инерции относительно оси x. Из определения следует, что радиус инерции есть длина, равная расстоянию от оси x той точки, в которой нужно сосредоточить массу всей системы, чтобы получить тот же момент инерции J_{xx}. Ясно, что

$$\rho_{xx}=\sqrt{\frac{J_{xx}}{M}}.$$

Можно поставить вопрос иначе: найти массу M', которую нужно сосредоточить в данной точке, находящейся от оси x на расстоянии d, чтобы получить тот же момент инерции J_{xx}. Для определения M' имеем равенство

$$M'd^2 = M\rho_{xx}^2,$$

откуда

$$M' = M\frac{\rho_{xx}^2}{d^2}.$$

Этот процесс называется приведением массы системы к данной точке.

Очевидно, что радиус инерции вполне определяет момент инерции системы относительно данной оси.

7. Моменты инерции относительно осей параллельного пучка. Теорема Гюйгенса (Штейнера). Из определения ясно, что осевой момент инерции данной неизменяемой системы зависит от положения оси, относительно которой вычисляется момент инерции; следовательно, осевые моменты инерции данной системы могут иметь относительно различных осей бесконечное множество значений, которое, однако, имеет нижнюю границу. Рассмотрим, как изменяется осевой момент инерции при переходе от одной оси x к другой l; для этого рассмотрим: 1) моменты инерции относительно осей параллельного пучка и 2) моменты инерции относительно осей пучка, выходящего из данной точки. Зная, каким образом изменяется момент инерции при переходе от одной оси к другой в первом и втором случаях, мы можем по данному моменту инерции относительно какой-либо оси x найти момент инерции относительно любой другой оси l. Для этого, взяв произвольную точку O на оси l, находим сначала момент инерции относительно оси x', параллельной x и проходящей через точку O, а затем от оси x' переходим к оси l.

Начнем с установления зависимости между моментами инерции относительно осей параллельного пучка. Проведем оси $Oxyz$ (рис. 41) и рассмотрим момент инерции системы относительно оси x; он будет

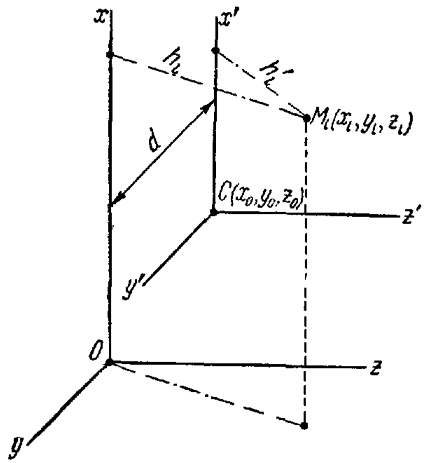


Рис. 41.

$$J_{xx}=\sum_i m_i h_i^2=\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2). \quad (1)$$

Возьмем ось x', параллельную оси x и проходящую через центр масс системы C, координаты которого пусть будут x_C, y_C, z_C; проведем еще через C оси y' и z', параллельные осям y и z. Тогда

$$y_i = y_i' + y_C,$$
$$z_i = z_i' + z_C,$$

где x_i', y_i', z_i' будут координаты точки M относительно системы осей $x'y'z'$. Подставляя эти выражения в равенство (1), будем иметь

$$J_{xx}=\sum_i m_i\left[(y_i'+y_C)^2+(z_i'+z_C)^2\right]=$$
$$=\sum_i m_i\left(y_i'^2+z_i'^2\right)+\sum_i m_i\left(y_C^2+z_C^2\right)+2\sum_i m_i\left(y_i'y_C+z_i'z_C\right). \quad (2)$$

Первый член правой части равенства (2) есть момент инерции системы относительно оси x'; второй член можем представить в виде

$$\sum_i m_i\left(y_C^2+z_C^2\right)=\left(y_C^2+z_C^2\right)\sum_i m_i = Md^2,$$

где M есть масса всей системы, а d — расстояние между осями x и x'. Третий член равен нулю, потому что

$$\sum_i m_i\left(y_i'y_C+z_i'z_C\right)=y_C\sum_i m_i y_i' + z_C\sum_i m_i z_i',$$

а $\sum_i m_i y_i'$ и $\sum_i m_i z_i'$ равны нулю, как статические моменты относительно плоскостей, проходящих через центр масс. Итак,

$$\sum_i m_i\left(y_i^2+z_i^2\right)=\sum m_i\left(y_i'^2+z_i'^2\right)+M\left(y_C^2+z_C^2\right),$$

или

$$J_{xx}=J_{x'x'}+Md^2. \quad (3)$$

Равенство (3) выражает собой теорему Гюйгенса: *момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инер-*

ции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс системы, сложенному с произведением массы всей системы на квадрат расстояния между осями. Если ввести радиусы инерции, то мы получим

$$\rho_{xx}^2 = \rho_{x'x'}^2 + d^2. \tag{4}$$

Из равенств (3) или (4) следует, что наименьшим из моментов инерции системы относительно осей параллельного пучка будет момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс системы.

Пользуясь теоремой Гюйгенса, можно легко определить момент инерции системы относительно любой оси пучка параллельных осей, если дан момент инерции относительно какой-либо одной оси этого пучка. Пусть дан момент инерции J_1 относительно оси 1; тогда по теореме Гюйгенса

$$J_1 = J_C + Md_1^2,$$

где J_C есть момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, а d_1 — расстояние центра масс до оси 1. Для оси 2, параллельной оси 1, аналогично имеем

$$J_2 = J_C + Md_2^2.$$

Из этих двух равенств получаем

$$J_2 = J_1 + M\left(d_2^2 - d_1^2\right).$$

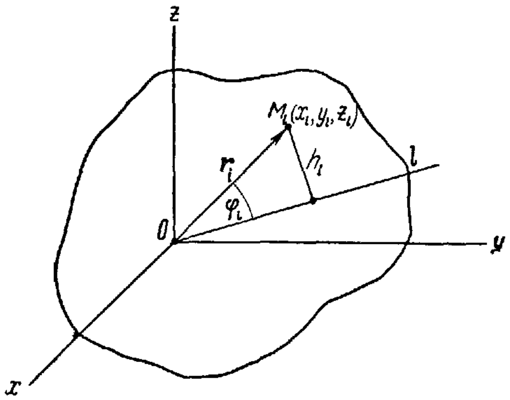


Рис. 42.

Теорема Гюйгенса относится не только к осевым моментам инерции, но может быть распространена на все моменты второй степени. Совершенно аналогичным способом легко доказать равенства

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i x_i'^2 + Mx_C^2 \quad \text{и т. д.},$$

$$\sum_i m_i y_i z_i = \sum_i m_i y_i' z_i' + My_C z_C \quad \text{и т. д.},$$

$$\sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) = \sum_i m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right) + M\left(x_C^2 + y_C^2 + z_C^2\right).$$

8. Моменты инерции относительно осей пучка, выходящего из данной точки. Найдем момент инерции системы относительно оси l, которая проходит через заданную точку O и направление которой по отношению к осям $Oxyz$ определяется направляющими косинусами α, β, γ (рис. 42); очевидно, момент инерции относительно

оси l будет функцией этих направляющих косинусов. Согласно определению осевого момента инерции имеем

$$J_l = \sum m_i h_i^2,$$

где h_i есть расстояние точки с массой m_i до оси l. Возьмем начало координат в точке O и положим $\overline{OM}_i = \boldsymbol{r}_i$, причем

$$\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{l}^0 = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i = r_i\cos\varphi_i,$$

где φ_i есть угол между направлениями $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{l}^0$; далее, так как $h_i = r_i\sin\varphi_i$, то

$$J_l = \sum m_i h_i^2 = \sum m_i r_i^2\sin^2\varphi_i = \sum m_i\left[r_i^2 - \left(r_i\cos\varphi_i\right)^2\right].$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, находим

$$J_l = \sum m_i\left[\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) - \left(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i\right)^2\right]$$

или

$$J_l = \sum m_i\left[\alpha^2\left(y_i^2 + z_i^2\right) + \beta^2\left(z_i^2 + x_i^2\right) + \gamma^2\left(x_i^2 + y_i^2\right) - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i - 2\alpha\beta x_i y_i\right].$$

Введем теперь следующие обозначения (см. п. 4 этого параграфа):

$$J_{xx} \equiv A = \sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right), \qquad J_{yz} \equiv D = \sum m_i y_i z_i,$$

$$J_{yy} \equiv B = \sum m_i\left(z_i^2 + x_i^2\right), \qquad J_{zx} \equiv E = \sum m_i z_i x_i,$$

$$J_{zz} \equiv C = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right), \qquad J_{xy} \equiv F = \sum m_i x_i y_i.$$

Тогда получим

$$J_l = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha - 2J_{xy}\alpha\beta, \tag{5}$$

или, в других обозначениях,

$$J_l = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta. \tag{5'}$$

9. Тензор инерции. Из равенства (5) следует, что для определения момента инерции тела относительно любой оси пучка, проходящего через точку O, достаточно знать шесть величин J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} (или A, B, C, D, E, F) и, конечно, направление этой оси, определяемое косинусами α, β, γ; при этом J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} представляют собой моменты инерции относительно соответствующих осей координат с началом в точке O, а J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} — произведения инерции. Эти шесть величин зависят от положения точки O и от направления координатных осей, потому что с изменением точки O

и при перемене направления координатных осей координаты точек тела x_i, y_i, z_i изменяются. Указанные величины можно расположить в виде симметричной матрицы

$$(J) \equiv \left\{ \begin{matrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{matrix} \right\}, \tag{6}$$

которая носит название *тензора инерции*; элементы этой матрицы называются компонентами тензора инерции. Из матрицы (6) видно, что диагональные компоненты тензора (J) представляют собой осевые моменты инерции, а остальные — произведения инерции со знаком минус, причем по определению $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, $J_{zx} = J_{xz}$. Тензор (J) представляет собой символический оператор, который, действуя на некоторый вектор $\boldsymbol{a}$, дает другой вектор $\boldsymbol{b}$ с проекциями, являющимися линейными функциями проекций вектора $\boldsymbol{a}$; при этом матрицей линейного преобразования является матрица (J). Вектор $\boldsymbol{b}$ называется линейной вектор-функцией вектора $\boldsymbol{a}$, а самая операция называется операцией умножения вектора $\boldsymbol{a}$ на тензор (J) и обозначается так:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(J).$$

Это равенство, согласно определению, запишется в проекциях следующим образом:

$$\begin{aligned} b_x &= J_{xx}a_x - J_{xy}a_y - J_{xz}a_z, \\ b_y &= -J_{yx}a_x + J_{yy}a_y - J_{yz}a_z, \\ b_z &= -J_{zx}a_x - J_{zy}a_y + J_{zz}a_z. \end{aligned}$$

Если за вектор $\boldsymbol{a}$ взять радиус-вектор точки M пространства $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, то уравнение

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}(A),$$

где

$$(A) \equiv \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\},$$

определит точку пространства $M'(x', y', z')$, причем

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Таким образом, каждой точке $M(x, y, z)$ пространства однозначно соответствует точка $M'(x', y', z')$. Такое преобразование пространства называется аффинным, поэтому оператор (A) называется

аффинором. Следовательно, (J) также представляет собою аффинор, и притом симметричный.

Посредством тензора (J) мы можем формулу (5) выразить следующим образом. Возьмем единичный вектор направления оси l:

$$\boldsymbol{l}^0 = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k};$$

тогда

$$\boldsymbol{l}^0(J) = (J_{xx}\alpha - J_{xy}\beta - J_{xz}\gamma)\,\boldsymbol{i} + (-J_{yx}\alpha + J_{yy}\beta - J_{yz}\gamma)\,\boldsymbol{j} + \\ + (-J_{zx}\alpha - J_{zy}\beta + J_{zz}\gamma)\,\boldsymbol{k}.$$

Умножая вектор $\boldsymbol{l}^0(J)$ на вектор $\boldsymbol{l}^0$ скалярно, получим

$$\boldsymbol{l}^0(J)\cdot\boldsymbol{l}^0 = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{xx}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha - 2J_{xy}\alpha\beta$$

Обозначая стоящую в правой части квадратичную форму аргументов α, β, γ для сокращения записи через $2F(\alpha, \beta, \gamma)$, получим

$$\boldsymbol{l}^0(J)\cdot\boldsymbol{l}^0 = 2F(\alpha, \beta, \gamma) = J_l.$$

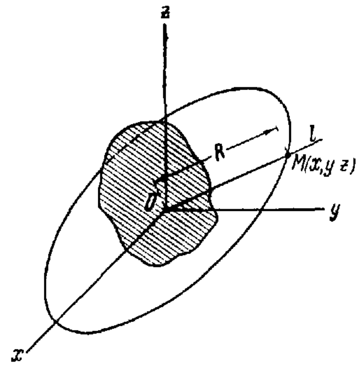


Рис. 43.

Отметим в заключение, что вообще каждому симметричному аффинору соответствует квадратичная форма; если аффинор (A) будет симметричный, т. е. если $a_{ik} = a_{kl}$, то квадратичная форма, соответствующая (A), будет $2F(x, y, z) = \boldsymbol{r}(A)\cdot\boldsymbol{r}$.

10. Эллипсоид инерции. В п. 8 мы получили выражение (5) момента инерции относительно оси l в зависимости от направляющих косинусов α, β, γ этой оси; следовательно, зная компоненты тензора (J) для точки O и данного направления координатных осей xyz, мы можем найти момент инерции для любой оси, проходящей через точку O. Можно дать геометрическую картину распределения моментов инерции относительно осей пучка с центром O путем построения эллипсоида инерции.

Возьмем на оси l пока произвольную длину $OM = R$; тогда координаты точки M будут (рис. 43)

$$x = R\alpha, \quad y = R\beta, \quad z = R\gamma.$$

Подставляя полученные из этих равенств значения α, β, γ в выражение (5) для J_l, получим

$$J_lR^2 = J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy, \tag{7}$$

или, сокращенно,

$$J_lR^2 = 2F(x, y, z).$$

Выберем теперь R так, чтобы было

$$J_l R^2 = k^2 \tag{8}$$

или

$$R = \frac{k}{\sqrt{J_l}}, \tag{8'}$$

где k есть постоянная величина. Тогда

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}y^2 - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy = k^2 \tag{9}$$

или

$$2F(x, y, z) = k^2, \tag{9'}$$

т. е. геометрическим местом точек M будет поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением (9). Из уравнения (8′) ясно, что поверхность (9) не имеет бесконечно удаленных точек, поскольку величина J_l существенно положительна и не равна нулю; следовательно, эта поверхность есть эллипсоид, который носит название *эллипсоида инерции* тела относительно центра O. Уравнение эллипсоида инерции (9) в иных обозначениях будет

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = k^2. \tag{9''}$$

Центр эллипсоида инерции, как показывает его уравнение, находится в точке O; постоянная k^2 может быть выбрана произвольно и определяет масштаб построения; меняя k^2, мы будем получать подобные эллипсоиды. Таким образом, каждой точке O данного тела будет соответствовать (с точностью до масштаба) вполне определенный эллипсоид инерции. Если точка O взята в центре масс, то эллипсоид инерции, построенный для этой точки, называется *центральным*. Главные оси эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* тела для точки O.

Так как длина R удовлетворяет равенству (8′), то длина радиуса-вектора эллипсоида инерции обратно пропорциональна корню квадратному из момента инерции тела относительно оси, направленной по этому радиусу.

Если вместо J_l ввести соответствующий радиус инерции, т. е. положить $J_l = M\rho_l^2$, то формула (8′) дает

$$R = \frac{k}{\rho_l \sqrt{M}},$$

т. е. длина радиуса-вектора эллипсоида инерции обратно пропорциональна радиусу инерции тела относительно оси того же направления.

11. Главные оси инерции. Главными осями инерции тела в данной точке называются главные оси эллипсоида инерции, построенного для этой точки; поэтому нахождение главных осей инерции

тела в данной точке O сводится к нахождению главных осей эллипсоида инерции, построенного для этой точки. Пусть уравнение этого эллипсоида в системе координат xyz будет (рис. 44)

$$2F(x, y, z) \equiv J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy = k^2. \tag{10}$$

Для нахождения главных осей эллипсоида инерции (10) будем исходить из того соображения, что для главных осей направление радиуса-вектора $\boldsymbol{R}$ совпадает с направлением нормали к эллипсоиду, или из того, что для главных осей R, а следовательно, как это вытекает из равенства (8′), и J_l имеют стационарное значение; в обоих случаях вычисления совершенно одинаковы.

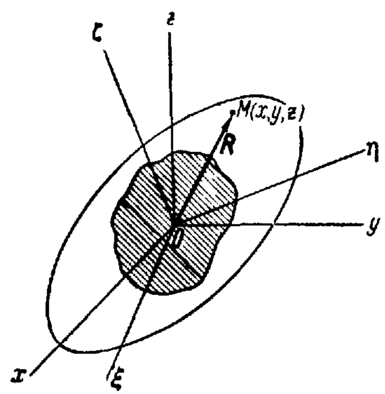


Рис. 44.

Итак, будем искать направления, для которых $\boldsymbol{R}$ совпадает с направлением нормали к эллипсоиду. Эти направления, очевидно, должны удовлетворять условию

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) = \lambda \boldsymbol{R}, \tag{11}$$

где λ есть коэффициент пропорциональности. Условие (11) в проекциях на оси xyz будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda z, \tag{11'}$$

или, принимая во внимание значение F, даваемое равенством (10), и перенося все члены в левую часть:

$$\left.\begin{aligned} (J_{xx} - \lambda)x - J_{xy}y - J_{xz}z &= 0, \\ -J_{yx}x + (J_{yy} - \lambda)y - J_{yz}z &= 0, \\ -J_{zx}x - J_{zy}y + (J_{zz} - \lambda)z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11''}$$

Условие совместности системы трех однородных линейных уравнений (11″), как известно, будет

$$\begin{vmatrix} J_{xx} - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) представляет собой так называемое характеристическое (вековое) уравнение, которое в случае симметричности тензора (J) и действительности его компонентов имеет три действительных корня: λ_1, λ_2, λ_3. Подставляя каждый из этих корней в систему (11″) и решая ее, получим три системы отношений координат

$$x_1 : y_1 : z_1, \quad x_2 : y_2 : z_2, \quad x_3 : y_3 : z_3,$$

которые дают три действительных направления, удовлетворяющих условию (11), т. е. дают три главные оси эллипсоида инерции.

Докажем, что эти три направления (которые по отношению к тензору (J) называются главными направлениями тензора) взаимно перпендикулярны; для этого докажем сначала перпендикулярность первого и второго направлений. Возьмем уравнения (11′) для координат первого направления, умножим их соответственно на x_2, y_2, z_2 и сложим; получим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 y_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 z_2 = \lambda_1 (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2); \quad (13)$$

делая то же самое в обратном порядке, найдем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_2 x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2 y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_2 z_1 = \lambda_2 (x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1). \quad (13')$$

Вычитая почленно из (13) равенство (13′), получим

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2), \quad (14)$$

так как левые части этих равенств, как соответствующие квадратичной форме $2F(x, y, z)$ билинейные формы, будут равны, что легко проверить непосредственно.

Предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$; тогда из равенства (14) следует

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \equiv \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 = 0,$$

а следовательно, $\boldsymbol{R}_1 \perp \boldsymbol{R}_2$. Точно таким же способом докажем перпендикулярность второго и третьего направлений, а также третьего и первого. Итак, если корни характеристического уравнения (12) различны, то в каждой точке тела O мы имеем три взаимно перпендикулярных направления, удовлетворяющих условию (11); эти направления будут, следовательно, главными осями эллипсоида инерции, а потому и главными осями инерции тела в точке O.

Возьмем теперь за оси координат главные оси инерции $\xi\eta\zeta$ и рассмотрим, как преобразуются при переходе к этой системе осей уравнение эллипсоида инерции (9) и компоненты тензора (J). Ясно, что квадратичная форма $2F(x, y, z)$ преобразуется в другую квадратичную форму $2F(\xi, \eta, \zeta)$, причем для осей ξ, η, ζ будут тождественно удовлетворяться уравнения (11′). Для оси ξ (т. е. для случая, когда вектор $\boldsymbol{R}$ направлен по оси ξ) будет $\eta = 0$, $\zeta = 0$, и мы получим

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0; \quad (15)$$

подобным же образом для осей η и ζ будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = \lambda_2 \eta, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0, \quad (15')$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \lambda_3 \zeta. \quad (15'')$$

Из равенства (15) имеем для оси ξ $(\eta = \zeta = 0)$

$$J_{\xi\xi}\xi = \lambda_1 \xi, \quad -J_{\eta\xi}\xi = 0, \quad -J_{\zeta\xi}\xi = 0,$$

т. е.

$$\lambda_1 = J_{\xi\xi}, \quad J_{\eta\xi} = J_{\zeta\xi} = 0. \quad (16)$$

Таким же образом для оси η $(\zeta = \xi = 0)$ имеем

$$-J_{\xi\eta}\eta = 0, \quad J_{\eta\eta}\eta = \lambda_2 \eta, \quad -J_{\zeta\eta}\eta = 0,$$

т. е.

$$\lambda_2 = J_{\eta\eta}, \quad J_{\xi\eta} = J_{\eta\zeta} = 0, \quad (16')$$

и для оси ζ $(\xi = \eta = 0)$

$$-J_{\xi\zeta}\zeta = 0, \quad J_{\eta\zeta}\zeta = 0, \quad J_{\zeta\zeta}\zeta = \lambda_3 \zeta,$$

т. е.

$$\lambda_3 = J_{\zeta\zeta}, \quad J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0. \quad (16'')$$

Формулы (16), (16′), (16″) показывают, что: 1) корни уравнения (12) λ_1, λ_2, λ_3 соответственно равны $J_{\xi\xi}$, $J_{\eta\eta}$, $J_{\zeta\zeta}$, т. е. равны моментам инерции тела относительно главных осей инерции, 2) если за координатную ось взята главная ось инерции, то произведения инерции, содержащие координаты, соответствующие этой оси, обращаются в нуль, т. е. если ось ξ главная, то $J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0$ и т. д. Моменты инерции $J_{\xi\xi}$, $J_{\eta\eta}$, $J_{\zeta\zeta}$ называются *главными моментами инерции* тела для центра O.

Следовательно, если за оси координат взяты главные оси инерции ξ, η, ζ, то квадратичная форма

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy$$

переходит в форму

$$J_{\xi\xi}\xi^2 + J_{\eta\eta}\eta^2 + J_{\zeta\zeta}\zeta^2$$

и тензор

$$\begin{Bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} J_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta\zeta} \end{Bmatrix}.$$

Уравнение эллипсоида инерции, отнесенное к главным осям, будет

$$J_{\xi\xi}\xi^2 + J_{\eta\eta}\eta^2 + J_{\zeta\zeta}\zeta^2 = k^2. \quad (17)$$

или в других обозначениях

$$\mathsf{A}\xi^2+\mathsf{B}\eta^2+\mathsf{C}\zeta^2=k^2. \qquad (17')$$

Если уравнение (12) имеет два равных корня, например $\lambda_1=\lambda_2$, то заключение о перпендикулярности направлений *1* и *2*, как видно из уравнения (14), не имеет места; в этом случае мы имеем

$$J_{\xi\xi}=J_{\eta\eta} \quad (\text{или } \mathsf{A}=\mathsf{B}),$$

т. е. два главных момента инерции между собою равны, и условию (11) будут удовлетворять все направления в плоскости $\xi\eta$, выходящие из точки O; следовательно, все оси в плоскости $\xi\eta$ будут главными осями инерции, и эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения, а плоскость $\xi\eta$ — его экваториальной плоскостью.

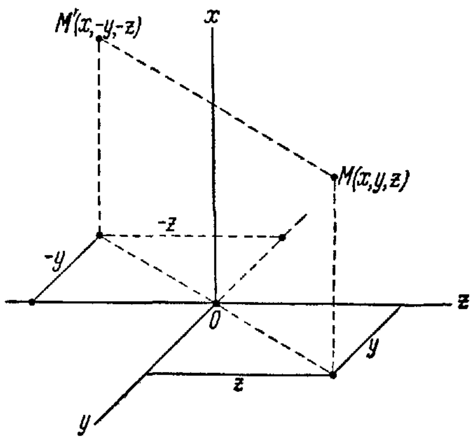


Рис. 45.

Если все три корня будут равны, т. е. если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, то эллипсоид инерции обращается в сферу, и все оси, проходящие через точку O, будут главными; в этом случае точка O называется шаровой точкой тела.

12. Свойства главных осей инерции. В предыдущем пункте было доказано, что если какая-либо ось, например x, является главной для точки O, то произведения инерции, содержащие координату x, обращаются в нуль, т. е.

$$J_{xy}\equiv\sum_i m_i x_i y_i=0, \quad J_{xz}\equiv\sum_i m_i z_i x_i=0. \qquad (18)$$

Обратно, если имеют место равенства (18), то ось x будет главной осью инерции. Действительно, в этом случае уравнение эллипсоида инерции будет

$$J_{xx}x^2+J_{yy}y^2+J_{zz}z^2-2J_{yz}yz=k^2,$$

откуда следует, что ось x будет главной осью этого эллипсоида. Следовательно, условия (18) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы ось x была главной осью инерции.

Докажем, что если *однородное* абсолютно твердое тело имеет ось симметрии, то эта ось будет главной осью инерции для всех точек данной оси. Пусть ось x (рис. 45) будет осью симметрии однородного абсолютно твердого тела; тогда каждой частице тела

$M(x, y, z)$ будет соответствовать такая же частица $M'(x, -y, -z)$, а поэтому

$$\sum m_i x_i y_i=0, \quad \sum m_i x_i z_i=0;$$

следовательно, ось x будет главной осью инерции для точки O, причем приведенное доказательство имеет место для любой точки O на оси симметрии.

Точно так же можно доказать, что если однородное абсолютно твердое тело имеет плоскость симметрии, то для всех точек этой плоскости одна из главных осей инерции будет к ней перпендикулярна. В самом деле, если примем плоскость симметрии за плоскость xy, то всякой частице $M(x, y, z)$ будет соответствовать такая же частица $M'(x, y, -z)$, следовательно,

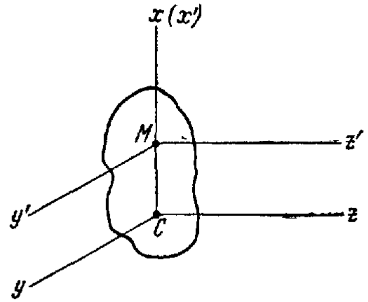


Рис. 46.

$$\sum m_i z_i x_i=0; \quad \sum m_i z_i y_i=0,$$

а потому ось z, перпендикулярная к плоскости xy, будет главной осью инерции для точки O, причем положение точки O в плоскости симметрии совершенно произвольно.

Главные оси инерции для центра масс тела называются *главными центральными* осями инерции. Точки, лежащие на главных центральных осях инерции тела, обладают тем свойством, что для всех этих точек главные оси инерции параллельны главным центральным осям инерции (а следовательно, и между собой). Действительно, пусть C есть центр масс тела, а x, y, z — главные центральные оси инерции (рис. 46). Возьмем на оси x точку M, причем $CM=a$, и проведем через M оси y' и z' параллельно осям y и z. Так как ось x есть главная для точки C, то

$$\sum m_i x_i y_i=0, \quad \sum m_i x_i z_i=0.$$

Переходя к системе координат x', y', z' с началом в M, имеем

$$x_i=x_i'+a, \quad y_i=y_i', \quad z_i=z_i';$$

подставляя эти величины в предыдущие равенства, получим

$$\sum m_i(x_i'+a)y_i'=0, \quad \sum m_i(x_i'+a)z_i'=0,$$

или

$$\sum m_i x_i' y_i'=-a\sum m_i y_i', \quad \sum m_i x_i' z_i'=-a\sum m_i z_i';$$

но так как

$$\sum m_i y_i'=\sum m_i z_i'=0,$$

как статические моменты тела относительно плоскостей, проходящих через центр масс, то имеем

$$\sum m_i x_i' y_i' = 0, \quad \sum m_i x_i' z_i' = 0;$$

следовательно, ось x будет главной осью инерции и для точки M. Далее, так как оси y и z будут тоже главными, то $\sum m_i y_i z_i = 0$, а отсюда следует, что

$$\sum m_i y_i' z_i' = 0;$$

следовательно, оси y' и z' будут также главными осями инерции для точки M, что и требовалось доказать. Нужно заметить, что другие точки тела этим свойством вообще не обладают.

13. Взаимный (гирационный) эллипсоид инерции. В некоторых случаях вместо эллипсоида инерции, рассмотренного в п. 10 и обыкновенно называемого эллипсоидом Пуансо, удобно пользоваться взаимным эллипсоидом инерции.

Эллипсоид Пуансо для точки O, если за координатные оси взять главные оси инерции, имеет уравнение

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}y^2 + \mathsf{C}z^2 = k^2, \tag{19}$$

где A, B, C суть главные моменты инерции для точки O. Полуоси этого эллипсоида, согласно равенству (8′), будут

$$a = \frac{k}{\sqrt{\mathsf{A}}}, \quad b = \frac{k}{\sqrt{\mathsf{B}}}, \quad c = \frac{k}{\sqrt{\mathsf{C}}},$$

т. е. обратно пропорциональны корням квадратным из главных моментов инерции; или, если ввести главные радиусы инерции, положив

$$\mathsf{A} = M\rho_a^2, \quad \mathsf{B} = M\rho_b^2, \quad \mathsf{C} = M\rho_c^2,$$

то

$$a = \frac{k}{\rho_a \sqrt{M}}, \quad b = \frac{k}{\rho_b \sqrt{M}}, \quad c = \frac{k}{\rho_c \sqrt{M}},$$

т. е. полуоси будут обратно пропорциональны главным радиусам инерции.

Во взаимном эллипсоиде инерции, наоборот, полуоси прямо пропорциональны корням квадратным из главных моментов инерции или главным радиусам инерции. Взаимный эллипсоид инерции получается из эллипсоида Пуансо (19) путем двойного преобразования. Первое преобразование состоит в том, что через каждую точку M эллипсоида (19) проводим касательную плоскость и из центра O опускаем на нее перпендикуляр; пересечение этого перпендикуляра с

касательной плоскостью определит точку M' (рис. 47). Геометрическое место точек M' будет поверхностью, которая называется *подерной поверхностью* данного эллипсоида относительно центра O. Второе преобразование заключается в инверсии точки M' относительно окружности произвольного радиуса R, т. е. в построении точки M'', которая определяется равенством

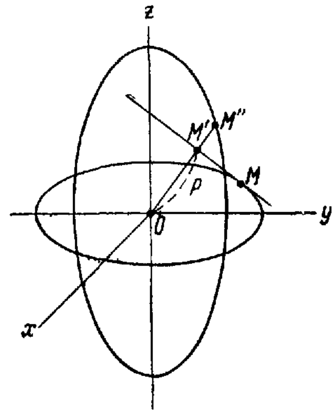


Рис. 47.

$$OM'' = \frac{R^2}{OM'}. \tag{20}$$

Геометрическое место точек M'' и даст поверхность, которая будет эллипсоидом, взаимным эллипсоиду (19). Найдем уравнение этого эллипсоида, для чего необходимо найти выражения координат точки M эллипсоида (19) через координаты точки M'' и подставить в уравнение (19).

Выразим сначала координаты точки $M(x, y, z)$ через координаты точки $M''(x'', y'', z'')$. Так как OM' есть расстояние точки O до касательной плоскости, проведенной через точку $M(x, y, z)$ эллипсоида, причем OM' параллельно нормали к эллипсоиду (19) в точке M, то имеем

$$OM' \equiv p = \frac{k^2}{\sqrt{\mathsf{A}^2x^2 + \mathsf{B}^2y^2 + \mathsf{C}^2z^2}};$$

$$\cos(OM', x) = \frac{\mathsf{A}xp}{k^2}, \quad \cos(OM', y) = \frac{\mathsf{B}yp}{k^2}, \quad \cos(OM', z) = \frac{\mathsf{C}zp}{k^2}; \tag{21}$$

далее, из равенств (20) и (21) имеем

$$OM'' = \frac{R^2}{p}; \quad x'' = OM''\cos(OM', x) = \frac{\mathsf{A}xR^2}{k^2},$$

$$y'' = OM''\cos(OM', y) = \frac{\mathsf{B}yR^2}{k^2}, \quad z'' = OM''\cos(OM', z) = \frac{\mathsf{C}zR^2}{k^2};$$

отсюда

$$x = \frac{x''}{\mathsf{A}}\frac{k^2}{R^2}, \quad y = \frac{y''}{\mathsf{B}}\frac{k^2}{R^2}, \quad z = \frac{z''}{\mathsf{C}}\frac{k^2}{R^2}. \tag{22}$$

Подставляя значения (22) в уравнение эллипсоида (19), получим

$$\frac{x''^2}{\mathsf{A}} + \frac{y''^2}{\mathsf{B}} + \frac{z''^2}{\mathsf{C}} = \frac{R^4}{k^2}, \tag{23}$$

т. е. геометрическое место точек M'' есть эллипсоид (23), который и будет взаимным по отношению к эллипсоиду (19). Легко видеть, что главные оси эллипсоидов (19) и (23) совпадают, причем для эллипсоида (23) полуоси будут прямо пропорциональны корням квадратным из главных моментов инерции, т. е.

$$a=\frac{k}{R^2}\sqrt{\mathsf{A}},\quad b=\frac{k}{R^2}\sqrt{\mathsf{B}},\quad c=\frac{k}{R^2}\sqrt{\mathsf{C}}.$$

Если преобразования, посредством которых мы получили из эллипсоида (19) эллипсоид (23), применить к эллипсоиду (23), то, как нетрудно показать, получим эллипсоид (19), вследствие чего оба этих эллипсоида и называются взаимными.

§ 12. Вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси

1. Уравнение движения. Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием системы активных сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Для вывода уравнения движения применим теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси, которую примем за ось z (рис. 48). Имеем [1])

$$\frac{dG_z}{dt}=\sum \operatorname{mom}_z \boldsymbol{F}_i. \qquad (1)$$

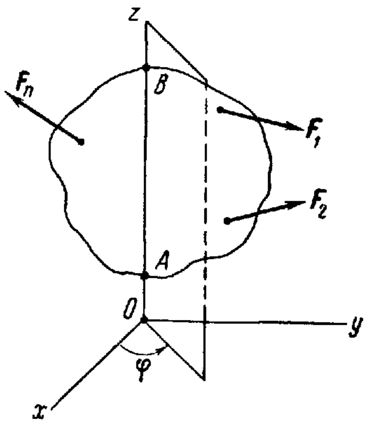


Рис. 48.

Но, как было показано [см. § 2 формулу (9)], для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z,

$$G_z=J_{zz}\omega=J_{zz}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Подставляя это значение G_z в равенство (1), получим уравнение движения твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, в виде

$$J_{zz}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum \operatorname{mom}_z \boldsymbol{F}_i. \qquad (2)$$

Интегрируя это уравнение, находим угол φ как функцию времени и этим вполне определяем движение, ибо в данном случае система имеет одну степень свободы и положение ее вполне определяется углом φ. Если внешние силы отсутствуют или направление их проходит через ось вращения z, то $\sum \operatorname{mom}_z \boldsymbol{F}_i=0$, и мы имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega=\text{const},\quad \varphi=\varphi_0+\omega t,$$

т. е. вращение будет происходить с постоянной угловой скоростью.

[1]) Реакции связей, закрепляющих тело на оси (например, в точках A и B), пересекают ось z и поэтому в правую часть уравнения (1) не войдут.

2. Давление на ось. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси можно рассматривать как движение твердого тела, при котором две его точки A и B неподвижно закреплены. Последнее определение удобно тем, что вполне определенно решается вопрос о реакциях связи, а именно можно сказать, что связь, осуществляемая двумя неподвижными точками A и B, по аксиоме о связях эквивалентна двум реакциям, приложенным в этих точках; эти реакции обозначим через $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Активные внешние силы обозначим через $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$; начало координат возьмем в точке A и за ось Az примем ось вращения (рис. 49). Применяя теорему об изменении количества движения, имеем

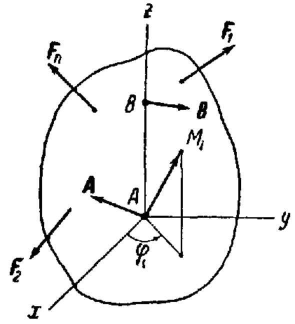


Рис. 49.

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\sum \boldsymbol{F}_i. \qquad (3)$$

Проектируя обе части равенства (3) на координатные оси, получим три уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum m_i\dot{x}_i&=A_x+B_x+\sum F_{ix},\\
\frac{d}{dt}\sum m_i\dot{y}_i&=A_y+B_y+\sum F_{iy},\\
\frac{d}{dt}\sum m_i\dot{z}_i&=A_z+B_z+\sum F_{iz}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Применяя теорему об изменении кинетического момента относительно центра A, имеем

$$\frac{d}{dt}\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\overline{AB}\times\boldsymbol{B}+\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i). \qquad (5)$$

Имея в виду, что

$$\operatorname{mom}_A\boldsymbol{B}\equiv\overline{AB}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&AB\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix},$$

и проектируя обе части равенства (5) на координатные оси, получаем еще три уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum m_i(y_i\dot{z}_i-z_i\dot{y}_i)&=-AB\cdot B_y+\sum(y_iF_{iz}-z_iF_{iy}),\\
\frac{d}{dt}\sum m_i(z_i\dot{x}_i-x_i\dot{z}_i)&=AB\cdot B_x+\sum(z_iF_{ix}-x_iF_{iz}),\\
\frac{d}{dt}\sum m_i(x_i\dot{y}_i-y_i\dot{x}_i)&=\sum(x_iF_{iy}-y_iF_{ix}).
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Преобразуем шесть уравнений (4) и (6), имея в виду, что

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, & \dot x &= -r\sin\varphi\cdot\dot\varphi = -y\omega, & \ddot x &= -x\omega^2 - y\dot\omega,\\ y &= r\sin\varphi, & \dot y &= r\cos\varphi\cdot\dot\varphi = x\omega, & \ddot y &= -y\omega^2 + x\dot\omega,\\ z &= \mathrm{const}, & \dot z &= 0, & \ddot z &= 0; \end{aligned}$$

тогда, выполняя дифференцирование и подставляя значения $\dot x$, $\ddot x$, $\dot y$, $\ddot y$, $\dot z$, $\ddot z$ в уравнения (4) и (6), получим

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2\sum m_ix_i - \dot\omega\sum m_iy_i &= A_x + B_x + \sum F_{ix},\\ -\omega^2\sum m_iy_i + \dot\omega\sum m_ix_i &= A_y + B_y + \sum F_{iy},\\ 0 &= A_z + B_z + \sum F_{iz},\\ -\dot\omega\sum m_iz_ix_i + \omega^2\sum m_iz_iy_i &= -AB\cdot B_y + \sum (y_iF_{iz} - z_iF_{iy}),\\ -\dot\omega\sum m_iz_iy_i - \omega^2\sum m_iz_ix_i &= AB\cdot B_x + \sum (z_iF_{ix} - x_iF_{iz}),\\ \dot\omega\sum m_i(x_i^2 + y_i^2) &= \sum (x_iF_{iy} - y_iF_{ix}). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Принимая во внимание, что

$$\sum m_ix_i = Mx_C, \quad \sum m_iy_i = My_C, \quad \sum m_iy_iz_i = J_{yz},$$
$$\sum m_iz_ix_i = J_{zx}, \quad \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = J_{zz},$$

где C обозначает центр масс тела, представим уравнения (7) в виде

$$\left.\begin{aligned} -Mx_C\omega^2 - My_C\dot\omega &= A_x + B_x + \sum F_{xi},\\ -My_C\omega^2 + Mx_C\dot\omega &= A_y + B_y + \sum F_{yi},\\ 0 &= A_z + B_z + \sum F_{zi},\\ J_{yz}\omega^2 - J_{zx}\dot\omega &= -AB\cdot B_y + \sum \mathrm{mom}_x(F_i),\\ -J_{zx}\omega^2 - J_{yz}\dot\omega &= AB\cdot B_x + \sum \mathrm{mom}_y(F_i),\\ J_{zz}\dot\omega &= \sum \mathrm{mom}_z(F_i). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Последнее уравнение системы (7) или (8) не содержит реакций и, следовательно, дает уравнение вращения твердого тела около неподвижной оси (2); интегрируя это уравнение, мы найдем сначала угловую скорость ω, а затем и угол φ в функции времени t. Остальные пять уравнений содержат проекции неизвестных реакций $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, число которых равно шести; система, следовательно, оказывается неопределенной, а именно, из уравнения третьего первой группы мы можем

определить лишь сумму $A_z + B_z$. [Эту неопределенность можно устранить соответствующим выбором форм подшипников (связей) в точках A и B.]

3. Условия, при которых динамические реакции равны статическим. Если бы твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения, было неподвижно, то $\omega = \dot\omega = 0$, и левые части уравнений (8) равнялись бы нулю; первые пять уравнений были бы тогда обыкновенными уравнениями равновесия и служили бы для определения реакций, которые в этом случае назовем статическими, а последнее уравнение, как не содержащее реакций, было бы условием равновесия.

В отличие от статических реакций, реакции при вращении твердого тела будем называть *динамическими*. Возникает вопрос, весьма важный в технике, об условиях, при которых вращение не вызывает добавочных давлений на ось, т. е. об условиях, при которых динамические реакции делаются равными статическим.

При произвольных условиях вращения твердого тела динамические реакции могут весьма сильно отличаться от статических. Это видно хотя бы из того, что если бы в случае равновесия все внешние активные силы равнялись нулю, то и реакции также были бы равны нулю; однако при вращении твердого тела около неподвижной оси динамические реакции при отсутствии внешних активных сил уже не будут равняться нулю, так как левые части четырех из уравнений (8) не равны нулю. Отсюда, между прочим, ясно, что для получения давления на ось, вызываемого вращением тела, нужно внешние активные силы в этих уравнениях приравнять нулю.

Найдем условия, при которых вращение твердого тела не вызывает добавочных реакций, т. е. условия, при которых динамические реакции равны статическим; для этого необходимо и достаточно, чтобы левые части уравнений (8), за исключением, конечно, последнего, не содержащего реакций, равнялись нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x_C\omega^2 + y_C\dot\omega &= 0,\\ x_C\dot\omega - y_C\omega^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} J_{yz}\omega^2 - J_{zx}\dot\omega &= 0,\\ J_{yz}\dot\omega + J_{zx}\omega^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Так как определители

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & \dot\omega \\ \dot\omega & -\omega^2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \omega^2 & -\dot\omega \\ \dot\omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

при вращении тела не равны нулю, то равенства (9) могут иметь место тогда и только тогда, когда

$$x_C = y_C = 0, \quad J_{yz} = J_{zx} = 0,$$

т. е. если центр тяжести тела лежит на оси вращения и ось вращения будет главной осью инерции для одной из своих точек. Соединяя оба результата, можем сказать, что *при вращении абсолютно твердого тела не возникает добавочных давлений на ось вращения, т. е. динамические давления равны статическим тогда и только тогда, когда осью вращения будет одна из главных центральных осей инерции.*

Все изложенное относилось к вращению несвободного твердого тела, у которого закреплены две точки. Рассмотрим, при каких условиях может происходить вращательное движение свободного твердого тела. Допустим, что никакие заданные внешние силы на тело не действуют. Поскольку тело является свободным, все реакции связей будут также равны нулю. Тогда из уравнений (8) следует, что и в данном случае должны выполняться условия (9), т. е. свободное тело может совершать чисто вращательное движение только вокруг одной из своих главных центральных осей инерции. По этой причине указанные оси называют еще *свободными осями вращения*.

В поле тяжести твердое тело может также совершать чисто вращательное движение вокруг одной из своих главных центральных осей инерции, если закрепить какую-нибудь одну из точек этой оси и если равнодействующая сил тяжести будет проходить через эту точку; примером служит вращение вертикального волчка.

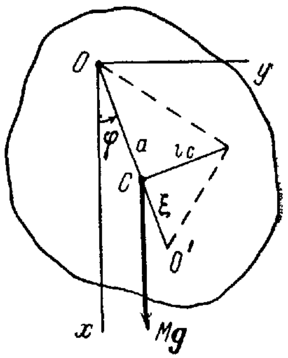


Рис. 50.

4. Физический маятник. Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси под действием силы тяжести. Ось вращения будем считать горизонтальной и примем ее за ось z. Примем за плоскость xy вертикальную плоскость, перпендикулярную к оси z и проходящую через центр тяжести C маятника (рис. 50). Составляя для маятника уравнение движения (2) и вводя обозначение $OC = a$, получим

$$J_O \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mga \sin\varphi, \tag{10}$$

где J_O есть момент инерции тела относительно оси z.

Уравнение (30) можно представить в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Mga \sin\varphi}{J_O} = 0. \tag{10'}$$

Сравнивая уравнение (10′) с уравнением движения плоского (кругового) математического маятника, которое имеет вид (см. ч. I, § 38)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0,$$

находим, что физический маятник будет колебаться по такому же закону, как плоский математический маятник длиною

$$l = \frac{J_O}{Ma}, \tag{11}$$

где a есть расстояние от центра тяжести до оси вращения; такой математический маятник называют синхронным данному физическому, а величину l — приведенной длиной физического маятника.

Для малых колебаний физического маятника полагаем $\sin\varphi \approx \varphi$; тогда уравнение (10′) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Mga}{J_O}\varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{Mga}{J_O}}\,t + \varepsilon\right),$$

где α и ε — постоянные, определяемые из начальных условий движения.

Период малых колебаний физического маятника будет, очевидно,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{Mga}}. \tag{12}$$

Полагая $J_O = Mi_O^2$, где i_O есть радиус инерции тела относительно оси z, получим из равенства (11) для приведенной длины физического маятника выражение

$$l = \frac{i_O^2}{a}. \tag{13}$$

Так как по теореме Гюйгенса

$$J_O = J_C + Ma^2, \qquad i_O^2 = i_C^2 + a^2, \tag{14}$$

где J_C есть момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести C параллельно оси z, а i_C — радиус инерции относительно той же оси, то, подставляя значения (14) в выражение (13), получим

$$l = a + \frac{i_C^2}{a}. \tag{15}$$

Из равенства (15) видно, что всегда $l > a$, т. е. приведенная длина физического маятника всегда больше расстояния от центра тяжести до оси вращения. Полагая $\frac{i_C^2}{a} = \xi$, имеем

$$a\xi = i_C^2,$$

т. е. длина ξ является третьей пропорциональной величин a и i_C и может быть получена простым геометрическим построением (рис. 50).

Докажем, что если за ось вращения физического маятника взять прямую, параллельную первоначальной оси вращения z и проходящую через точку O', которая лежит в плоскости xy на расстоянии $l = a + \xi$ от оси z, то период колебания физического маятника не изменится. Действительно, возьмем за ось вращения ось O' (см. рис. 50), параллельную оси z; тогда для этой оси, на основании равенства (15), приведенная длина маятника будет

$$l' = \xi + \frac{i_C^2}{\xi};$$

подставляя во второй член правой части этого равенства значение ξ, получим

$$l' = \xi + a = l,$$

т. е. для оси O' приведенная длина будет та же, что для оси O, откуда и следует доказываемое. Таким образом, оси O и O' являются взаимными. На этом основано свойство оборотного физического маятника, используемое в известном из курса физики оборотном маятнике Катера, применяемом для экспериментального определения ускорения силы тяжести. Заметим, что точку O называют центром качаний физического маятника.

5. Давление маятника на ось. Для определения давления физического маятника на ось вращения воспользуемся уравнениями (8) п. 2, причем предположим, что тело однородно и симметрично относительно плоскости Oxy, проходящей через центр тяжести C (см. рис. 50). Тогда ось z будет главной осью инерции тела для точки O (§ 11, п. 12); следовательно, $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Так как в данном случае на тело действует только одна сила $M\boldsymbol{g}$, приложенная в точке $C(x_C, y_C)$ в плоскости Oxy и параллельная оси x, то уравнения (8), если считать точку A совпадающей с O, примут вид

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 Mx_C - \dot{\omega} My_C &= A_x + B_x + Mg, \\ -\omega^2 My_C + \dot{\omega} Mx_C &= A_y + B_y, \\ 0 &= A_z + B_z, \\ 0 &= -AB \cdot B_y, \\ 0 &= AB \cdot B_x, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

где B—какая-нибудь точка оси z. Принимая во внимание, что на основании уравнений (16) $B_x = B_y = 0$ и считая закрепление в точке B таким, что $B_z = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} A_x &= -\omega^2 Mx_C - \dot{\omega} My_C - Mg, \\ A_y &= -\omega^2 My_C + \dot{\omega} Mx_C. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Уравнения (17) показывают, что в случае симметрии реакция оси сводится только к одной силе $\boldsymbol{A}$, приложенной к точке O в плоскости Oxy; проекции этой силы на оси x и y определяются уравнениями (17).

§ 13. Плоскопараллельное движение абсолютно твердого тела

1. При плоскопараллельном движении точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной (основной) плоскости (см. ч. I, § 9, п. 1). Всякое движение твердого тела кинематически и динамически можно рассматривать состоящим из движения центра масс и движения тела относительно центра масс. При плоскопараллельном движении центр масс движется параллельно неподвижной плоскости, а движение относительно центра масс есть вращение тела вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к неподвижной плоскости.

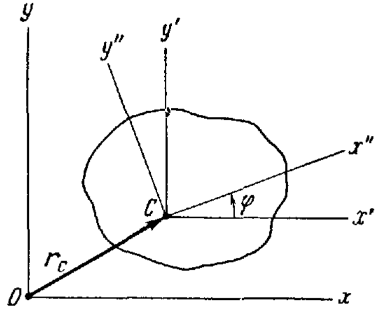


Рис. 51.

Проведем через центр масс C тела плоскость, параллельную неподвижной, и возьмем в этой плоскости неподвижные оси Oxy (рис. 51). Плоскость Oxy пересечет тело по некоторому сечению, положением которого относительно осей Oxy определяется положение тела. Проведем через центр масс C оси $Cx'y'$, параллельные осям Oxy, и подвижные оси $Cx''y''$, скрепленные с телом. Тогда положение тела будет определяться положением центра масс C, т. е. радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_C(x_C, y_C)$ и углом φ между осями Cx' и Cx''.

По теореме о движении центра масс имеем

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i, \qquad (1)$$

где $\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i$ есть главный вектор внешних сил, действующих на тело, M — масса тела. Проектируя обе части равенства (1) на оси основной системы, получим

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{ix}, \qquad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum F_{iy}. \qquad (2)$$

Теорема моментов относительно центра масс дает уравнение

$$J_C\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum \mathrm{mom}_C\, \boldsymbol{F}_i, \qquad (3)$$

где J_C есть момент инерции тела относительно оси Cz', проходящей через центр масс.

Интегрируя систему трех уравнений (2) и (3), определим x_C, y_C и φ как функции времени t.

Уравнения движения центра масс можно составить также в проекциях на касательную и главную нормаль к траектории, т. е. в виде

$$M\frac{dv_C}{dt}=\sum F_{i\tau}, \qquad M\frac{v_C^2}{\rho_C^2}=\sum F_{in}, \tag{4}$$

где v_C есть скорость центра масс, а ρ_C — радиус кривизны его траектории. Тогда определение движения тела сведется к интегрированию системы уравнений (3), (4).

При интегрировании системы уравнений (2) и (3) или (4), (3), можно эти уравнения заменять другими, получающимися в результате их взаимных комбинаций.

1) Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия твердого тела относительно неподвижной системы Oxy по теореме Кёнига равна

$$T=\frac{1}{2}\left(Mv_C^2+J_C\omega^2\right)=\frac{M}{2}\left[\left(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2\right)+i_C^2\dot{\varphi}^2\right], \tag{5}$$

где v_C есть скорость центра масс, а $i_C=\sqrt{\frac{J_C}{M}}$ есть радиус инерции тела, относительно оси Cz', проходящей через центр масс.

По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$dT=\sum \boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{r}_i. \tag{6}$$

Подставляя выражение кинетической энергии в это равенство, получим уравнение

$$d\,\frac{M}{2}\left[\left(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2\right)+i_C^2\dot{\varphi}^2\right]=\sum\left(F_{ix}\,dx_i+F_{iy}\,dy_i\right), \tag{7}$$

которым можно заменить любое из трех уравнений (2) и (3) или (4), (3).

Уравнение, выражающее теорему, можно составлять и в конечной (интегральной) форме

$$T-T_0=\sum A_i^e. \tag{8}$$

2) Применим теорему моментов относительно оси Oz основной (неподвижной) системы. Так как, по доказанному ранее (см. § 2, п. 3), кинетический момент относительно неподвижного центра O равен сумме кинетического момента центра масс, в котором сосредоточена масса тела, относительно центра O и кинетического момента тела относительно центра C в его движении по отношению к системе

осей $x'Cy'$, проходящих через центр масс и перемещающихся поступательно, т. е.

$$\boldsymbol{G}_O=\left(\boldsymbol{r}_C\times M\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\right)+\boldsymbol{G}_C', \tag{9}$$

то

$$G_{Oz}=M\left[x_C\frac{dy_C}{dt}-y_C\frac{dx_C}{dt}\right]+J_C\frac{d\varphi}{dt}. \tag{10}$$

В результате теорема моментов дает

$$\frac{d}{dt}\left[M\left(x_C\frac{dy_C}{dt}-y_C\frac{dx_C}{dt}\right)+J_C\frac{d\varphi}{dt}\right]=\sum\left(x_iF_{iy}-y_iF_{ix}\right). \tag{11}$$

Уравнение (11) также может заменить любое из трех уравнений (2), (3) или (4), (3).

Свободное твердое тело, как следует из результатов п. 3 § 12, может совершать плоскопараллельное движение только по отношению к плоскости Oxy, перпендикулярной к одной из главных центральных осей инерции тела; при этом необходимо, чтобы для действующих на тело внешних сил выполнялись условия $\sum F_{iz}=0$, $\sum \mathrm{mom}_{x'}\boldsymbol{F}_i=0$, $\sum \mathrm{mom}_{y'}\boldsymbol{F}_i=0$ (см. рис. 51), а начальные скорости всех точек тела должны быть равны нулю или параллельны плоскости Oxy.

При несвободном движении уравнения (2), (3), (4), (6), (11) сохраняют свой вид, но в их правые части войдут еще реакции связей. Поэтому для определения закона движения, т. е. $x_C(t)$, $y_C(t)$, $\varphi(t)$, и реакций связей к любым трем уравнениям движения необходимо еще добавить уравнения, выражающие условия, налагаемые на движение связями. Если связи идеальные и явно от времени не зависят, то реакции этих связей в уравнение (7), выражающее теорему об изменении кинетической энергии, входить не будут.

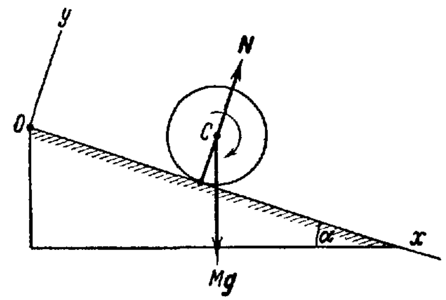


Рис. 52.

В случае нескольких твердых тел для каждого из них можно составить какие-нибудь три уравнения движения, а затем исключить взаимные реакции или составлять уравнения движения сразу для системы этих тел.

2. Примеры. 1) *Скольжение цилиндра вдоль наклонной плоскости.* Пусть тяжелый круглый цилиндр движется, касаясь абсолютно гладкой наклонной плоскости, образующей с горизонтальной плоскостью угол α, так, что ось цилиндра остается все время горизонтальной. Движение происходит параллельно вертикальной плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра (рис. 52). Найдем уравнения движения цилиндра.

Внешние силы, действующие на цилиндр: сила тяжести $M\boldsymbol{g}$ и реакции наклонной плоскости $\boldsymbol{N}$. Направим оси основной системы следующим образом: Ox — вдоль наклонной плоскости и Oy — перпендикулярно к ней. Если координаты центра тяжести обозначим через x_C, y_C, то уравнения движения будут:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= Mg\sin\alpha, \\ M\ddot{y}_C &= -Mg\cos\alpha + N, \\ J_C\ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{а})$$

Здесь мы имеем случай несвободного движения. Условие, налагаемое на движение связью, состоит в том, что $y_C = R$, $\ddot{y}_C = 0$. Тогда второе из уравнений принимает вид

$$0 = -Mg\cos\alpha + N,$$

откуда определяется реакция

$$N = Mg\cos\alpha.$$

Из третьего уравнения системы (а) имеем $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, т. е. угловая скорость вращения цилиндра будет оставаться постоянной во все время движения.

Итак, цилиндр будет вращаться с той угловой скоростью, которая ему была сообщена в начальный момент, а центр тяжести его (ось) будет двигаться вдоль наклонной плоскости с ускорением $\ddot{x}_C = g\sin\alpha$.

2) *Качение цилиндра.* Условия те же, что в предыдущем примере, но плоскость шероховатая и цилиндр катится по плоскости без скольжения.

К внешним силам $M\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{N}$ добавится в этом случае сила трения скольжения $\boldsymbol{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости в сторону, противоположную движению (рис. 53). Уравнения движения будут

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= Mg\sin\alpha - F, \\ M\ddot{y}_C &= -Mg\cos\alpha + N, \\ J_C\ddot{\varphi} &= FR. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{б})$$

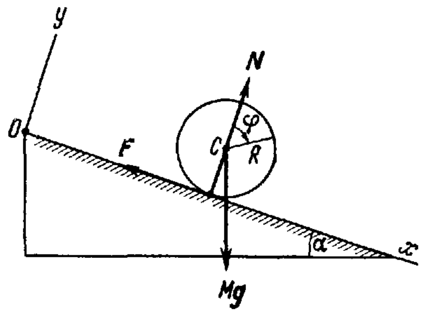


Рис. 53.

В последнем уравнении справа знак плюс, так как для момента следует брать то же положительное направление, что и для отсчета угла φ. Движение по-прежнему несвободное и $\ddot{y}_C = 0$; следовательно, и в этом случае $N = Mg\cos\alpha$. Из последнего уравнения имеем

$$F = \frac{J_C\ddot{\varphi}}{R}.$$

В данном случае связь налагает на движение еще одно ограничение: поскольку при качении цилиндра мгновенная ось вращения направлена вдоль образующей, соприкасающейся с плоскостью, то в любой момент времени $\dot{x}_C = R\dot{\varphi}$ и, следовательно, $\ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}$. Обозначим радиус инерции цилиндра

относительно оси C через i_C; тогда $J_C = Mi_C^2$, и выражение для F примет вид

$$F = \frac{Mi_C^2\ddot{x}_C}{R^2}.$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений (б), получим

$$M\ddot{x}_C + \frac{Mi_C^2\ddot{x}_C}{R^2} = Mg\sin\alpha,$$

или

$$\ddot{x}_C\left(1 + \frac{i_C^2}{R^2}\right) = g\sin\alpha,$$

откуда

$$\ddot{x}_C = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{i_C^2}{R^2}}.$$

Сравнивая полученное выражение с результатом предыдущего примера, мы видим, что в случае чистого качения ускорение будет меньше, чем в случае чистого скольжения. Такой же результат можно получить и из теоремы об изменении кинетической энергии.

Для случая однородного цилиндра

$$J_C = \frac{MR^2}{2}, \quad i_C^2 = \frac{R^2}{2} \quad \text{и} \quad \ddot{x}_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$$

Ускорение, следовательно, меньше на одну треть по сравнению с тем, которое будет при чистом скольжении. Сила трения равна $F = \frac{1}{3}Mg\sin\alpha$.

Найдем дополнительно, при каких значениях коэффициента трения f цилиндра о плоскость возможно рассматриваемое движение (т. е. качение без скольжения). Заметим, что когда цилиндр не скользит вдоль плоскости, сила трения может не достигать предельного значения; поэтому F и N здесь связаны неравенством $F \leqslant fN$. Подставляя сюда найденные значения F и N, имеем

$$\frac{1}{3}Mg\sin\alpha \leqslant fMg\cos\alpha,$$

откуда

$$f \geqslant \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

Если коэффициент трения будет меньше этой величины, то цилиндр будет катиться вдоль плоскости с проскальзыванием. Уравнения движения при этом сохранят вид (б), но одно из условий, налагаемых связями, изменится, а именно равенство $\dot{x}_C = R\dot{\varphi}$ не будет иметь места. Однако вместо этого появится другое соотношение: поскольку точка касания скользит вдоль плоскости, то сила трения имеет предельное значение и, следовательно, $F = fN$.

В результате 1-е и 3-е уравнения в системе (б) примут вид

$$M\ddot{x}_C = Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha); \quad \frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi} = fMgR\cos\alpha,$$

откуда

$$\ddot{x}_C = g(\sin\alpha - f\cos\alpha); \quad \ddot{\varphi} = \frac{2fg}{R}\cos\alpha. \qquad \text{(в)}$$

Следовательно, центр цилиндра в этом случае движется с постоянным ускореннем $\ddot{x}_C$, а сам цилиндр вращается с постоянным угловым ускорением $\ddot{\varphi}$, значения которых определяются равенствами (в). Для вычисления этих величин дожен быть дополнительно задан коэффициент трения f.

3) *Качение цилиндра по цилиндрической поверхности.* Пусть однородный круглый цилиндр радиусом r катится без скольжения по цилиндрической же поверхности радиусом R (рис. 54), начиная движение из наивысшего положения без начальной скорости (точнее с пренебрежимо малой начальной скоростью). Найдем, в каком положении, определяемым углом $\theta = \theta_1$, цилиндр оторвется от поверхности.

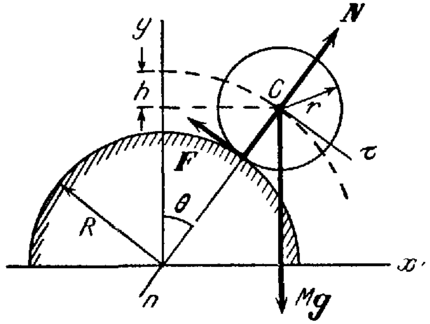


Рис. 54.

Изобразим действующие на цилиндр силу тяжести $M\boldsymbol{g}$, нормальную реакцию плоскости N и силу трения $\boldsymbol{F}$. Цилиндр будет оставаться иа поверхности до тех пор, пока реакция N имеет направление, показанное на рисунке. Следовательно, для определения места отрыва, если оно существует, надо найти зависимость $N(\theta)$. Эту зависимость проще всего получить из уравнения движения центра масс в проекции на главную нормаль n к его траектории [2-е уравнение в системе (4)], которое дает

$$M\frac{v_C^2}{R+r} = Mg\cos\theta - N. \qquad \text{(г)}$$

Входящую сюда величину v_C^2 найдем из теоремы об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad \text{(д)}$$

Так как движение начинается из состояния покоя, то $T_0 = 0$. Для T по теореме Кёнига имеем

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{4}Mr^2\omega^2 = \frac{3}{4}Mv_C^2,$$

поскольку, как и в предыдущем примере, здесь имеет место соотношение $v_C = \omega r$.

Силы N и F в данном случае работы не совершают, так как они все время приложены в точке, элементарное перемещение которой равно нулю. Работа же силы тяжести на перемещении, определяемом углом θ, будет $A = Mgh = Mg(R+r)(1-\cos\theta)$. В результате уравнение (д) принимает вид

$$\frac{3}{4}Mv_C^2 = Mg(R+r)(1-\cos\theta).$$

Определяя отсюда значение Mv_C^2 и подставляя его в равенство (г), найдем окончательно

$$N = \frac{Mg}{3}(7\cos\theta - 4). \qquad \text{(е)}$$

Отсюда видно, что если $7\cos\theta < 4$, то $N > 0$, т. е. реакция имеет направление, показанное на чертеже, и цилиндр остается на поверхности; если же $7\cos\theta > 4$, то $N < 0$ и направление реакции меняется на прямо противоположное. Но реакцию, имеющую такое направление, поверхность развить не может. Следовательно, место отрыва определяется равенством

$$\cos\theta_1 = \frac{4}{7} \quad (\theta_1 \approx 54^\circ)$$

и от величин раднусов не зависит.

Найдем, каким должен быть коэффициент трения, чтобы цилиндр мог катиться без скольжения до точки отрыва. Для этого надо вычислить величину F. Составим 1-е из уравнений (4) и уравнение (3). Замечая, что $\frac{dv_C}{dt} = \ddot{s}_C$, получим

$$M\ddot{s}_C = Mg\sin\theta - F, \quad J_C\ddot{\varphi} = Fr.$$

Эти уравнения такие же, как 1-е и 3-е уравиения системы (б) в предыдущем примере. Поэтому, учитывая, что и здесь $\ddot{s}_C = r\ddot{\varphi}$, и исключая из двух составленных уравнений ускорение, найдем аналогично предыдущему примеру, что $F = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$. Далее имеем $F \leqslant fN$, откуда $f \geqslant \frac{F}{N}$. Но при $\theta = \theta_1$ $F \neq 0$, а $N = 0$. Следовательно, чтобы качение без скольжения происходило до места отрыва, должно быть $f = \infty$. Практически это возможно, если между катящимся цилиндром и цилиндрической поверхностью будет зубчатое зацепление. Если же величина f будет конечна, то, не доходя до места отрыва, цилиндр начнет скользить; при этом зависимость $v_C(\theta)$ изменится и место отрыва станет другим.

§ 14. Движение абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Основные кинематические соотношения

1. Предварительные замечания. Согласно теореме Шаля (см. ч. I, § 12, п. 1) всякое движение свободного твердого тела можно рассматривать как совокупность двух движений: поступательного движения, определяемого движением произвольно выбранной точки тела, и движения (вращения) около этой точки как неподвижной; в динамике часто выбирают за такую точку центр масс твердого тела. Тогда движение тела будет слагаться из поступательного движения, определяемого движением центра масс, и движения тела около центра масс как неподвижной точки.

В ряде случаев движения твердого тела дифференциальные уравнения, определяющие поступательное движение тела (уравнения движения выбранной точки), не зависят от уравнений движения тела около выбранной точки, и обе системы уравнений можно самостоятельно интегрировать. Аналитические трудности возникают главным образом при интегрировании второй системы; поэтому задача о движении твердого тела около неподвижной точки имеет основное значение в механике твердого тела.

Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы. Следовательно, положение твердого тела можно определить заданием трех независимых обобщенных координат, что может быть сделано разными способами (углы Эйлера, параметры Олинда Родрига и др.). Классическими параметрами являются три эйлеровых угла: φ, ψ, θ. Если они заданы для данного момента, то задано и положение тела. Если же φ, ψ, θ известны в функции времени t, то известно будет положение тела в каждый момент времени, а следовательно, будет известно движение твердого тела.

2. Регулярная прецессия. Из теоремы Даламбера вытекает, что движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно рассматривать как последовательность бесконечно малых вращений около мгновенных осей вращения, проходящих через неподвижную точку (см. ч. I, § 10, п. 2). Геометрическое место последовательных положений мгновенной оси вращения в пространстве, связанном с телом, образует коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке, называемую подвижным аксоидом. Геометрическое место мгновенных осей вращения относительно основной системы ориентировки есть другой конус с вершиной в неподвижной точке и называется неподвижным аксоидом. Геометрически движение твердого тела около неподвижной точки сводится к качению без скольжения подвижного аксоида по неподвижному.

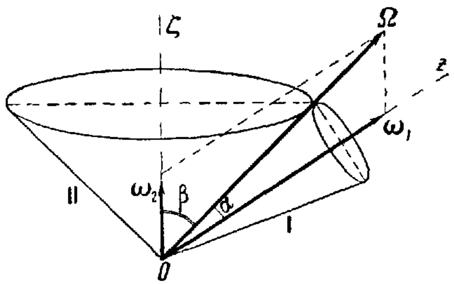


Рис. 55.

Рассмотрим с кинематической точки зрения одно из движений твердого тела с неподвижной точкой O, важное для дальнейшего, — так называемую *регулярную прецессию*, т. е. такое сложное движение тела, когда тело вращается с постоянной по численной величине угловой скоростью ω_1 вокруг оси z, связанной с телом (обычно оси симметрии), а эта ось поворачивается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг другой неподвижной оси ζ, составляя с неподвижной осью ζ один и тот же угол (рис. 55).

Подвижной и неподвижный аксоиды (на рисунке конусы I и II) будут в этом случае круглыми конусами; их оси образуют с мгновенной угловой скоростью результирующего движения Ω постоянные углы α и β. Подвижной аксоид (конус I) называют конусом собственного вращения, а его ось z — *осью собственного вращения*; неподвижный аксоид (конус II) называют конусом прецессии, а его ось

ζ — *осью прецессии*. Эти названия астрономического происхождения. Земная ось (если отвлечься от движения центра масс Земли), являясь осью собственного вращения, медленно поворачивается (прецессирует) в пространстве и в период около 26 000 лет (годовая прецессия $\approx 50''$) описывает конус (конус прецессии), ось которого (ось прецессии) перпендикулярна к плоскости эклиптики и составляет с земной осью угол, равный $23°28'$ (в настоящую эпоху).

Прецессия называется *прямой*, если угол между угловой скоростью собственного вращения ω_1 и угловой скоростью прецессии ω_2 острый (касание конусов I и II при этом внешнее), и *обратной* (рис. 56), если угол между ω_1 и ω_2 тупой (касание аксоидов внутреннее). Прецессия земной оси есть пример обратной прецессии.

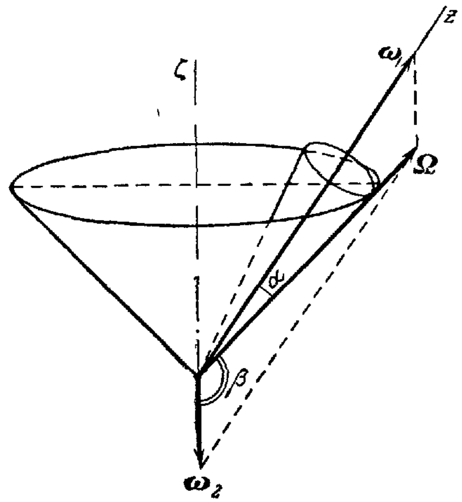


Рис. 56.

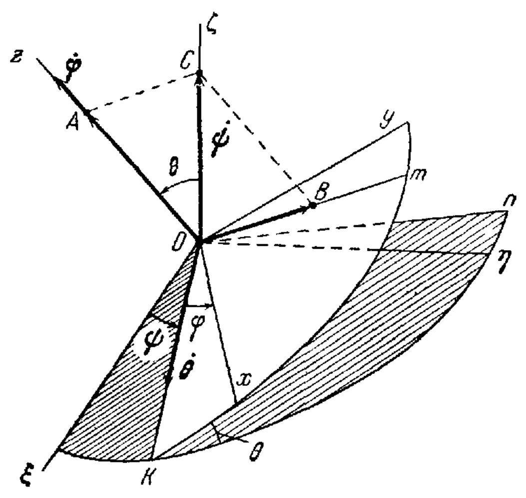


Рис. 57.

Между угловыми скоростями ω_1, ω_2 и Ω существуют соотношения, вытекающие из параллелограмма угловых скоростей, а именно:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2;$$

$$\frac{\omega_2}{\sin\alpha} = \frac{\omega_1}{\sin\beta} = \frac{\Omega}{\sin(\alpha+\beta)}$$

и

$$\Omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos(\alpha+\beta).$$

3. Кинематические уравнения Эйлера. Обозначим (рис. 57) основную систему ориентировки через $O\xi\eta\zeta$, а подвижную систему, неизменно связанную с твердым телом, — через $Oxyz$. Начала обеих систем координат совпадают с неподвижной точкой O твердого тела. Положение тела в данный момент времени определяется положением подвижной системы отсчета относительно неподвижной, которое будем задавать тремя эйлеровыми углами φ, ψ, θ (см. ч. I, стр. 93). Прямая пересечения плоскостей $O\xi\eta$ и Oxy называется *линией узлов*; обозначим ее через OK Положительное направление на ней выбирается так, чтобы наблюдатель, расположенный вдоль OK, видел поворот от оси $O\zeta$ к Oz совершающимся против хода часовой стрелки. Напомним, что эйлеровыми углами будут:

φ — угол между линией узлов OK и осью Ox,

ψ — угол между осью $O\xi$ и линией узлов OK

и

θ — угол между осями $O\zeta$ и Oz.

Ось Oz называется осью *собственного вращения*, и в соответствии с этим угол φ и угловая скорость $\dot{\varphi}$ называются углом и угловой скоростью собственного вращения. Ось $O\zeta$ называется осью *прецессии*, а угол ψ и угловая скорость $\dot{\psi}$ будут соответственно углом и угловой скоростью прецессии. Линия узлов OK называется осью *нутации*, а угол θ и угловая скорость $\dot{\theta}$ — углом и угловой скоростью нутации.

Когда изменяется только один из эйлеровых углов, например φ (ψ и θ остаются постоянными), то движение твердого тела есть вращение около соответствующей оси, в данном случае оси z, с угловой скоростью $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{z}^0$, направленной по оси z. Если же изменяются все три угла φ, ψ, θ, то угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела по теореме о сложении угловых скоростей, пересекающихся в одной точке (ч I, § 11, п. 3), будет суммой угловых скоростей $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ и $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, направленных соответственно по осям Oz, $O\zeta$ и OK; при этом

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{z}^0, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\psi}\boldsymbol{\zeta}^0 \quad \text{и} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta}\boldsymbol{K}^0,$$

где $\boldsymbol{K}^0$ есть единичный вектор линии узлов. Таким образом, имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{1}$$

Обозначим проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси подвижной системы координат через p, q, r, а на оси неподвижной системы через p', q', r'. Выведем кинематические уравнения Эйлера, дающие p, q, r в функции эйлеровых углов и их производных. Проведем вспомогательную прямую Om, перпендикулярную к плоскости OKz, и разложим угловую скорость прецессии $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ по направлениям Oz и Om. Это разложение возможно, ибо Om по построению перпендикулярно к OK, а Oz и $O\zeta$ также перпендикулярны к OK и, следовательно, все три прямые Oz, $O\zeta$ и Om лежат в одной плоскости. Так как Om перпендикулярно к Oz, то в параллелограмме $OACB$ угол при

вершине O прямой, следовательно, параллелограмм является прямоугольником и

$$OA = OC \cdot \cos\theta = \dot{\psi}\cos\theta, \quad OB = \dot{\psi}\sin\theta.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{z}^0\dot{\psi}\cos\theta + \boldsymbol{m}^0\dot{\psi}\sin\theta. \tag{2}$$

Проектируем обе части равенства (1) на подвижные оси, принимая во внимание соотношение (2) и замечая, что $\angle KOx = \angle mOy = \varphi$; получим

$$p = \dot{\varphi}\cos\frac{\pi}{2} + (\dot{\psi}\cos\theta)\cos\frac{\pi}{2} + (\dot{\psi}\sin\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$q = \dot{\varphi}\cos\frac{\pi}{2} + (\dot{\psi}\cos\theta)\cos\frac{\pi}{2} + (\dot{\psi}\sin\theta)\cos\varphi + \dot{\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\theta}\cos\frac{\pi}{2}.$$

После упрощения имеем

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \varphi &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для получения кинематических уравнений Эйлера в неподвижной системе ориентировки проведем другую вспомогательную прямую On, перпендикулярную к плоскости $OK\zeta$, и разложим угловую скорость собственного вращения $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{z}^0$ по направлениям On и $O\zeta$; будем иметь

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = (-\boldsymbol{n}^0)\dot{\varphi}\sin\theta + \zeta^0\dot{\varphi}\cos\theta.$$

Тогда, проектируя обе части равенства (1) на неподвижные оси и принимая во внимание найденное выражение для $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, а также то, что $\angle \eta On = \angle \xi OK = \psi$, получим

$$p' = (\dot{\varphi}\sin\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + (\dot{\varphi}\cos\theta)\cos\frac{\pi}{2} + \dot{\psi}\cos\frac{\pi}{2} + \dot{\theta}\cos\psi,$$

$$q' = (\dot{\varphi}\sin\theta)\cos(\pi - \psi) + (\dot{\varphi}\cos\theta)\cos\frac{\pi}{2} + \dot{\psi}\cos\frac{\pi}{2} + \dot{\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right),$$

$$r' = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} + \dot{\theta}\cos\frac{\pi}{2}.$$

Окончательно будем иметь

$$\left.\begin{aligned} p' &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ q' &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \\ r' &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Приведем другой вывод уравнений (3). Представим равенство (1), введя единичные векторы, в виде

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{z}^0+\dot{\psi}\boldsymbol{\zeta}^0+\dot{\theta}\boldsymbol{K}^0. \qquad (1')$$

Выразим единичные векторы $\boldsymbol{\zeta}^0$ и $\boldsymbol{K}^0$ через единичные векторы подвижных осей $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{y}^0$, $\boldsymbol{z}^0$; имеем

$$\boldsymbol{K}^0=\cos\varphi\cdot\boldsymbol{x}^0-\sin\varphi\cdot\boldsymbol{y}^0$$

и

$$\boldsymbol{\zeta}^0=\cos\theta\cdot\boldsymbol{z}^0+\sin\theta\cdot\boldsymbol{m}^0.$$

Но так как $\angle mOy=\varphi$, то

$$\boldsymbol{m}^0=\sin\varphi\cdot\boldsymbol{x}^0+\cos\varphi\cdot\boldsymbol{y}^0$$

и

$$\boldsymbol{\zeta}^0=\cos\theta\cdot\boldsymbol{z}^0+\sin\theta\,(\sin\varphi\cdot\boldsymbol{x}^0+\cos\varphi\cdot\boldsymbol{y}^0).$$

При найденных значениях $\boldsymbol{K}^0$ и $\boldsymbol{\zeta}^0$ равенство (1′) примет вид

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{z}^0+\dot{\psi}(\cos\theta\cdot\boldsymbol{z}^0+\sin\theta\sin\varphi\cdot\boldsymbol{x}^0+\sin\theta\cos\varphi\cdot\boldsymbol{y}^0)+ \\ +\dot{\theta}(\cos\varphi\cdot\boldsymbol{x}^0-\sin\varphi\cdot\boldsymbol{y}^0)$$

или

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{x}^0(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi)+\boldsymbol{y}^0(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi)+ \\ +\boldsymbol{z}^0(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\varphi).$$

Отсюда получаем систему (3).

Уравнения (3) или соответственно (4) позволяют вычислить мгновенную угловую скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ через ее проекции p, q, r (или p', q', r'), когда закон движения тела, т. е. зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ известны.

При решении основной задачи динамики уравнения (3) дают три соотношения между шестью неизвестными функциями времени φ, ψ, θ, p, q, r. Присоединяя эти три уравнения к трем динамическим уравнениям Эйлера, которые устанавливают зависимость между p, q, r и действующими силами (эти динамические уравнения будут получены в § 16, п. 1), будем иметь систему шести дифференциальных уравнений первого порядка, из которых могут быть найдены шесть величин p, q, r, φ, ψ, θ как функции времени.

§ 15. Выражения основных динамических величин для твердого тела, имеющего неподвижную точку

1. Кинетический момент. Так как скорость точки твердого тела есть $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$, то кинетический момент $\boldsymbol{G}_O$ твердого тела относительно неподвижной точки O будет (в дальнейшем для краткости

индекс O при векторе $\boldsymbol{G}_O$ опускаем)

$$\boldsymbol{G}=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum[\boldsymbol{r}_i\times m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)]= \\ =\boldsymbol{\omega}\sum m_ir_i^2-\sum m_i\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega}).$$

Проектируем обе части этого равенства на подвижные оси. Проекция на ось x будет

$$G_x=p\sum m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-\sum m_ix_i(px_i+qy_i+rz_i)= \\ =p\sum m_i(y_i^2+z_i^2)-q\sum m_ix_iy_i-r\sum m_ix_iz_i.$$

Вводя компоненты симметрического тензора инерции относительно неподвижной точки и повторяя вывод для осей y и z, получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} G_x&=pJ_{xx}-qJ_{xy}-rJ_{xz},\\ G_y&=-pJ_{yx}+qJ_{yy}-rJ_{yz},\\ G_z&=-pJ_{zx}-qJ_{zy}+rJ_{zz},\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

или, в других обозначениях,

$$\left.\begin{aligned} G_x&=Ap-Fq-Er,\\ G_y&=-Fp+Bq-Dr,\\ G_z&=-Ep-Dq+Cr.\end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

[Последние две из формул (1) или (1′) получаются из первой посредством циклической перестановки индексов x, y, z и соответственно p, q, r.]

Формулы (1) показывают, что проекции $\boldsymbol{G}$ являются линейными функциями проекций $\boldsymbol{\omega}$, коэффициентами которых являются компоненты тензора инерции.

Обозначая тензор инерции символом (J), можно представить равенство (1) в виде

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\omega}(J), \qquad (2)$$

т. е. представить вектор $\boldsymbol{G}$ как произведение вектора $\boldsymbol{\omega}$ на тензор (J) (см. § 11, п. 9).

Формула (2) показывает, что вектор кинетического момента $\boldsymbol{G}$ есть линейная вектор-функция угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$; при этом вектор $\boldsymbol{G}$ получается аффинным преобразованием вектора $\boldsymbol{\omega}$ посредством тензора инерции (J).

Если за подвижные оси взять главные оси инерции тела для неподвижной точки, то произведения инерции обратятся в нуль, т. е.

$J_{yz}=J_{zx}=J_{xy}=0$, и формулы (2) перейдут в более простые, а именно:

$$\left.\begin{aligned} G_x &= J_{xx}p = Ap, \\ G_y &= J_{yy}q = Bq, \\ G_z &= J_{zz}r = Cr. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

2. Кинетическая энергия. Выразим кинетическую энергию твердого тела в фукции вектора $\boldsymbol{\omega}$. Согласно определению имеем

$$2T = \sum m_i v_i^2 = \sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) =$$
$$= \sum \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{\omega} \cdot \sum (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{G}.$$

Итак,

$$2T = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{4}$$

т. е. удвоенная кинетическая энергия твердого тела, имеющего неподвижную точку, равняется скалярному произведению кинетического момента относительно этой точки на угловую скорость тела.

Выражая скалярное произведение (4) через проекции сомножителей на оси и заменяя проекции $\boldsymbol{G}$ их выражениями (1), получим

$$2T = J_{xx}p^2 + J_{yy}q^2 + J_{zz}r^2 - 2J_{yz}qr - 2J_{zx}rp - 2J_{xy}pq, \tag{5}$$

или в других обозначениях

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq, \tag{5$'$}$$

что можно записать короче

$$2T = 2\Phi(p, q, r). \tag{6}$$

Из формулы (5) мы заключаем, что кинетическая энергия твердого тела есть однородная квадратичная функция проекций угловой скорости.

Если за подвижные оси взяты главные оси инерции тела, то $J_{yz}=J_{zx}=J_{xy}=0$, и формула (5) примет вид

$$2T = J_{xx}p^2 + J_{yy}q^2 + J_{zz}r^2, \tag{7}$$

или в других обозначениях

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2. \tag{7$'$}$$

Для вычисления кинетической энергии тела с неподвижной точкой можно указать еще другую формулу. Если обозначить момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения через J_ω, то, поскольку мгновенное распределение скоростей точек тела при элементарном повороте вокруг мгновенной оси является таким же, как при вращении вокруг неподвижной оси, для вычисления кинетической

энергии тела с неподвижной точкой должна быть справедлива формула

$$T = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2. \tag{8}$$

Покажем, что эта формула вытекает и из равенства (5). В самом деле, если обозначить направляющие косинусы мгновенной оси вращения через α, β, γ, то

$$p = \omega\alpha, \quad q = \omega\beta, \quad r = \omega\gamma.$$

Подставляя эти значения в равенство (5), получим

$$2T = (J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha - 2J_{xy}\alpha\beta)\,\omega^2,$$

т. е. придем к равенству (8), так как, согласно формуле (5) из п. 8, § 11, выражение в скобках равно J_ω. По формуле (8) можно также вычислить J_ω, если величины T и ω в данный момент времени известны.

Отметим в заключение, что если взять частные производные от выражения (5) по p, q, r и принять во внимание формулы (1), то получим следующую зависимость между величинами $\boldsymbol{G}$ и T:

$$G_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad G_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad G_z = \frac{\partial T}{\partial r}, \tag{9}$$

что можно записать короче:

$$\boldsymbol{G} = \operatorname{grad}_{p,\,q,\,r} T, \tag{9$'$}$$

где индексы p, q, r указывают переменные, по которым берется (формально) операция grad.

3. Эллипсоид энергии. Выясним энергетический смысл эллипсоида инерции Пуансо (см. § 11, п. 10). Будем откладывать от неподвижной точки O на векторах угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ отрезки $OM = R_1$, пропорциональные модулю соответствующей угловой скорости; получим векторы

$$\boldsymbol{R}_1 = k_1\boldsymbol{\omega}, \tag{10}$$

где $k_1 = \mathrm{const}$ — коэффициент пропорциональности. Обозначим проекции $\boldsymbol{R}_1$ на подвижные оси временно через x_1, y_1, z_1. Тогда

$$x_1 = k_1 p, \quad y_1 = k_1 q, \quad z_1 = k_1 r. \tag{11}$$

Определяя из равенств (11) p, q, r и подставляя их в выражение (6) для кинетической энергии, получим

$$2Tk_1^2 = 2\Phi(x_1, y_1, z_1). \tag{12}$$

Если потребовать, чтобы было $2T = \mathrm{const}$, то равенство (12) обратится в следующее:

$$2\Phi(x_1, y_1, z_1) = 2Tk_1^2 = \mathrm{const}, \tag{13}$$

или в развернутом виде:

$$J_{xx}x_1^2 + J_{yy}y_1^2 + J_{zz}z_1^2 - 2J_{yz}y_1z_1 - 2J_{zx}z_1x_1 - 2J_{xy}x_1y_1 = 2Tk_1^2 = \text{const}. \tag{13'}$$

Это уравнение поверхности второго порядка (эллипсоида), подобной эллипсоиду инерции и подобно с ним расположенной.

Для всех точек эллипсоида получаемые из формулы (10) угловые скорости $\omega = \frac{R_1}{k_1}$ соответствуют одному и тому же численному значению кинетической энергии твердого тела; поэтому поверхность (13′) носит название эллипсоида энергии. Меняя значения константы k в формуле (9) из п. 10 § 11 или константы k_1 в формуле (13′), можно построить для данной точки твердого тела семейство эллипсоидов инерции (или энергии). Каждому из них будет соответствовать свое значение кинетической энергии твердого тела. В этом и заключается энергетический смысл эллипсоида инерции Пуансо.

Каждый из семейства эллипсоидов инерции (построенного для данной точки) является в то же время и эллипсоидом энергии. Легко заметить зависимость между константами k и k_1 в формулах (9) из § 11 и (13′), соответствующими одному и тому же отдельному эллипсоиду семейства.

Согласно формулам (8′) § 11 и (10)

$$R = \frac{k}{\sqrt{J}}, \quad R_1 = k_1\omega.$$

Если это один и тот же эллипсоид, то необходимо, чтобы было $R = R_1$. Отсюда

$$\frac{k}{\sqrt{J}} = k_1\omega.$$

Далее, согласно формуле (8), имеем

$$2T = J\omega^2;$$

вычисляя отсюда величину ω и подставляя ее в предыдущее равенство, получим

$$\frac{k}{\sqrt{J}} = k_1\frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{J}},$$

или

$$k = k_1\sqrt{2T}. \tag{14}$$

4. Связь между направлением вектора кинетического момента и эллипсоидом инерции. Из формул (1) и (11) следует, что проекции на подвижные оси кинетического момента твердого тела

относительно неподвижной точки можно представить в виде

$$G_x = \frac{1}{k_1}(J_{xx}x_1 - J_{xy}y_1 - J_{xz}z_1); \tag{15}$$

для G_y и G_z получаются две аналогичные формулы. Но из выражений (13), (13′) для функции $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ следует, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = J_{xx}x_1 - J_{xy}y_1 - J_{xz}z_1, \tag{16}$$

и два аналогичных выражения получаются для $\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}$. Сравнивая между собой равенства (15), (16) и им аналогичные, заключаем, что

$$G_x = \frac{1}{k_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \quad G_y = \frac{1}{k_1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}, \quad G_z = \frac{1}{k_1}\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}. \tag{17}$$

Три скалярных равенства (17) можно записать в виде одного векторного:

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{k_1}\,\mathrm{grad}_{(x_1, y_1, z_1)}\Phi(x_1, y_1, z_1). \tag{17'}$$

Заметим, что соотношения (17), (17′) можно получить непосредственно из равенств (5) или (9′), если учесть обозначение (12) и зависимости (11).

Итак, кинетический момент твердого тела относительно неподвижной точки есть (с точностью до постоянного множителя) градиент скалярной функции $\Phi(x_1, y_1, z_1)$. Но градиент скалярного поля Φ нормален к поверхностям уровня поля $\Phi = \text{const}$ (см. ч. I, § 33, п. 5). Следовательно, кинетический момент $\boldsymbol{G}$, будучи приложен в неподвижной точке O, параллелен нормали $\boldsymbol{\nu}^0$ к эллипсоиду инерции (энергии) в точке $M(x_1, y_1, z_1)$, в которой эллипсоид пересекается мгновенной осью вращения (рис. 58).

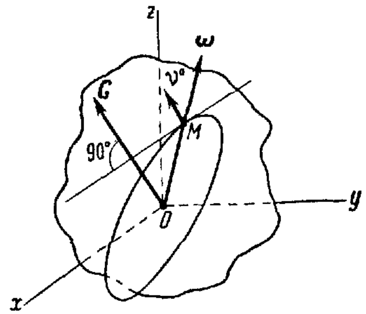


Рис. 58.

Соединяя доказанную теорему с предшествующими выводами, можно сказать, что *кинетический момент* $\boldsymbol{G}$ *твердого тела относительно неподвижной точки тела есть вектор, получаемый аффинным преобразованием вектора угловой скорости* $\boldsymbol{\omega}$ *при посредстве тензора инерции. Этот вектор, являясь градиентом скалярной функции* $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ *(с точностью до постоянного множителя), параллелен нормали к эллипсоиду инерции в той точке, в которой ось мгновенного вращения пересекает эллипсоид инерции.*

5. Динамический смысл главных осей инерции. Возьмем в качестве подвижных координатных осей главные оси эллипсоида инерции. Тогда проекции кинетического момента будут определяться формулами (3) из п. 1:

$$\left.\begin{aligned} G_x &= J_{xx}p = Ap, \\ G_y &= J_{yy}q = Bq, \\ G_z &= J_{zz}r = Cr. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Из этих формул следует, что кинетический момент и угловая скорость могут быть направлены одинаково в трех и только в трех различных случаях, а именно в тех случаях, когда направления этих векторов совпадают с направлениями главных осей инерции (если только эллипсоид инерции не есть эллипсоид вращения или сфера).

Для доказательства положим в формулах (18) две из проекций угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ равными нулю. Например, пусть $q=0$, $r=0$, т. е. предположим, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по оси x; тогда получим

$$G_x = Ap, \quad G_y = 0, \quad G_z = 0.$$

Следовательно, и кинетический момент направлен по той же оси x. Аналогичный результат получим и для двух других осей.

Покажем теперь, что в случае неравенства между собой моментов инерции A, B и C главные оси будут единственными направлениями, для которых угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарна с кинетическим моментом $\boldsymbol{G}$. В самом деле, если $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарны и не равняются порознь нулю, то имеет место уравнение

$$\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{\omega} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ Ap & Bq & Cr \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} (B-C)\,qr &= 0, \\ (C-A)\,rp &= 0, \\ (A-B)\,pq &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

В зависимости от значений A, B и C могут иметь место три случая:

1) A, B, C не равны между собой; тогда уравнениям (19) можно удовлетворить, только положив две из проекций угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ равными нулю, а это и дает три главных направления эллипсоида инерции.

2) Два из моментов инерции A, B, C равны между собой, например $B=C\neq A$, т. е. эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения. В этом случае первое из уравнений (19) тождественно удовлетворяется. Чтобы удовлетворить двум остальным уравнениям, достаточно положить либо $q=0$ и $r=0$, что дает одно из главных направлений, именно ось x, либо $p=0$, что дает $\boldsymbol{\omega}$ бесконечное множество направлений, расположенных в экваторной плоскости yz эллипсоида инерции.

3) $A=B=C$; тогда эллипсоид инерции превращается в сферу. В этом случае уравнения (19) удовлетворяются всегда при любых p, q, r; тогда $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{G}$ коллинеарны при вращении вокруг любой из осей, проходящих через неподвижную точку, т. е. в любом направлении.

Итак, кинетический момент $\boldsymbol{G}$ и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ могут быть коллинеарны только по главным осям эллипсоида инерции. В этом и заключается динамический смысл главных направлений эллипсоида инерции.

Заметим, что геометрически полученные здесь результаты непосредственно вытекают из теоремы, доказанной в п. 4. Согласно этой теореме вектор $\boldsymbol{G}$ параллелен нормали $\boldsymbol{\nu}^0$ к поверхности эллипсоида инерции, проведенной в точке $M(x_1, y_1, z_1)$, где эта поверхность пересекается с мгновенной осью вращения тела, т. е. с направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$. Отсюда следует, что коллинеарность векторов $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{\omega}$ имеет место лишь тогда, когда нормаль $\boldsymbol{\nu}^0$ в точке M_1 поверхности эллипсоида направлена вдоль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки. Но если $A\neq B\neq C$, то условие $\boldsymbol{\nu}^0 \parallel \boldsymbol{r}$ имеет место только для главных осей эллипсоида; при $B=C\neq A$ это имеет место для оси x и для всех осей, лежащих в плоскости yz; наконец, при $A=B=C$ указанное условие имеет место для любого направления. Отсюда и следуют все сделанные выше выводы.

§ 16. Динамические уравнения Эйлера. Общая постановка задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой

1. Динамические уравнения Эйлера для движения твердого тела около неподвижной точки. Пусть твердое тело движется около неподвижной точки O. Как и в § 14, кроме основной системы осей $O\xi\eta\zeta$ (неподвижной), возьмем систему подвижных осей $Oxyz$, неизменно связанных с телом и движущихся вместе с ним относительно неподвижной системы $O\xi\eta\zeta$.

Теорема об изменении кинетического момента относительно основной (неподвижной) системы ориентировки $O\xi\eta\zeta$ дает уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \boldsymbol{M}_O, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{M}_O$ есть главный момент всех внешних сил, действующих на твердое тело, относительно неподвижной точки O.

Проектировать уравнение (1) на неподвижные оси $O\xi\eta\zeta$ весьма невыгодно, ибо, хотя формула (2) § 15 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\omega}(J)$ и дает выражения проекций G_ξ, G_η, G_ζ [аналогичные формулам (1) § 15, но написанные для осей $O\xi\eta\zeta$], однако коэффициенты в них, т. е. компоненты тензора инерции движущегося тела относительно неподвижных осей, меняются со временем, и уравнения движения в проекциях будут иметь сложный вид.

При выводе динамических уравнений движения твердого тела Эйлер сделал два упрощения. Первое из них состоит в проектировании обеих частей уравнения (1) на оси подвижной системы.

Если $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ есть производная какого-либо вектора $\boldsymbol{a}$ относительно основной системы, $\frac{\tilde{d}\boldsymbol{a}}{dt}$ — так называемая локальная производная (изменение $\boldsymbol{a}$ относительно подвижной системы), то, как известно,

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{a}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}$$

(см. ч. I, § 13, п. 2). Применяя эту формулу к вектору $\boldsymbol{G}$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{G}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{G},$$

и уравнение (1) примет вид

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{G}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{G}=\boldsymbol{M}_O. \tag{2}$$

Спроектируем обе части равенства (2) на оси подвижной системы $Oxyz$, причем при проектировании $\frac{\tilde{d}\boldsymbol{G}}{dt}$ опустим знак локальной производной, ибо локальная производная берется именно относительно подвижной системы; получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dG_x}{dt}+qG_z-rG_y=M_x,\\
&\frac{dG_y}{dt}+rG_x-pG_z=M_y,\\
&\frac{dG_z}{dt}+pG_y-qG_x=M_z,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где G_x, G_y и G_z определяются формулами (1) или (1′) из п. 1 § 15, а именно:

$$\left.\begin{aligned}
G_x&=Ap-Fq-Er,\\
G_y&=-Fp+Bq-Dr,\\
G_z&=-Ep-Dq+Cr.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь компоненты тензора инерции A, B, C, D, E, F суть постоянные числа.

Второе упрощение Эйлера — выбор за оси подвижной системы ориентировки главных осей инерции тела относительно неподвижной точки. При этом выборе формулы (4) упростятся и запишутся так:

$$\left.\begin{aligned}
G_x&=Ap,\\
G_y&=Bq,\\
Gz&=Cr.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В результате уравнения (3) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=M_x,\\
&B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=M_y,\\
&C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=M_z.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Система (6) представляет дифференциальные уравнения движения твердого тела около неподвижной точки, впервые выведенные Эйлером (1765 г.); эти уравнения называют *динамическими уравнениями Эйлера*

Присоединяя к уравнениям (6) три кинематических уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned}
p&=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\\
q&=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,\\
r&=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

получим систему шести обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести неизвестных функций времени p, q, r, φ, ψ, θ. Общие интегралы должны содержать шесть произвольных постоянных, которые определятся, если задать начальное положение и начальную угловую скорость тела, т. е. φ_0, ψ_0, θ_0, p_0, q_0, r_0.

Исключая из уравнений (6) и (7) p, q и r, можно получить три дифференциальных уравнения второго порядка относительно трех эйлеровых углов φ, ψ, θ.

Если принять во внимание, что в общем случае проекции главного момента внешних сил M_x, M_y, M_z являются сами функциями t, φ, ψ, θ, p, q, r, то становятся понятными трудности, возникающие при интегрировании системы шести уравнений (6) и (7); даже частный случай, именно случай движения твердого тела около неподвижной точки под действием одной лишь силы тяжести, не может быть решен в общем виде (см. § 19, п. 2).

2. Определение реакции неподвижной точки. Реакция $\boldsymbol{R}$ неподвижной точки O не входит в уравнения Эйлера, так как $\boldsymbol{R}$ проходит через O и, следовательно, $\operatorname{mom}_O \boldsymbol{R} = 0$. Для определения $\boldsymbol{R}$ достаточно применить другую теорему динамики — теорему о движении центра масс, т. е.

$$m\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}, \tag{8}$$

где m есть масса тела, $\boldsymbol{w}_C$ — ускорение центра масс, а $\boldsymbol{F}$ — главный вектор активных внешних сил.

Ускорение $\boldsymbol{w}_C$, входящее в равенство (8), может быть выражено по теореме Ривальса (см. ч I, § 10, п 5), т. е.

$$\boldsymbol{w}_C = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_C),$$

или

$$\boldsymbol{w}_C = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_C) - \omega^2 \boldsymbol{r}_C. \tag{9}$$

Проектируя обе части равенств (8) и (9) на подвижные оси, получим

$$\left.\begin{aligned} m w_{Cx} &= R_x + F_x, \\ m w_{Cy} &= R_y + F_y, \\ m w_{Cz} &= R_z + F_z, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} w_{Cx} &= \dot{q} z_C - \dot{r} y_C + p (p x_C + q y_C + r z_C) - \omega^2 x_C, \\ w_{Cy} &= \dot{r} x_C - \dot{p} z_C + q (p x_C + q y_C + r z_C) - \omega^2 y_C, \\ w_{Cz} &= \dot{p} y_C - \dot{q} x_C + r (p x_C + q y_C + r z_C) - \omega^2 z_C, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

при этом $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

Если уравнения Эйлера (6) и (7) проинтегрированы, то φ, ψ, θ, p, q, r известны в функции t, а следовательно, известен закон движения тела. Подставляя p, q, r в уравнение (11), найдем w_{Cx}, w_{Cy}, w_{Cz} в функции t, а тогда, после подстановки их в уравнения (10), найдутся искомые проекции реакции неподвижной точки.

В частном случае, если центр масс совпадает с неподвижной точкой, реакция $\boldsymbol{R}$ точки O может быть определена независимо от интегрирования уравнений Эйлера В самом деле, в этом случае $r_C = 0$, следовательно, и $\boldsymbol{w}_C = 0$. Поэтому уравнение (8) примет вид

$$0 = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F},$$

откуда

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{F}.$$

3. Общая постановка задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Рассмотрим движение твердого тела около неподвижной точки под действием одной только силы тяжести $\boldsymbol{P}$. Направим ось $O\zeta$ основной системы ориентировки $O\xi\eta\zeta$, связанной с Землей, вертикально вверх (рис. 59)[1]. Обозначим: через $Oxyz$ — подвижную систему ориентировки; через $\boldsymbol{r}_C(x_C, y_C, z_C)$ — радиус-вектор центра тяжести C относительно начала O; через γ_1, γ_2, γ_3 — косинусы углов вертикальной неподвижной оси $O\zeta$ с подвижными осями. Так как угловая скорость $\dot{\psi}$ (§ 14, п. 3) направлена по оси $O\zeta$, то направляющие косинусы $O\zeta$ будут равны множителям при $\dot{\psi}$ в кинематических уравнениях Эйлера (7). Следовательно,

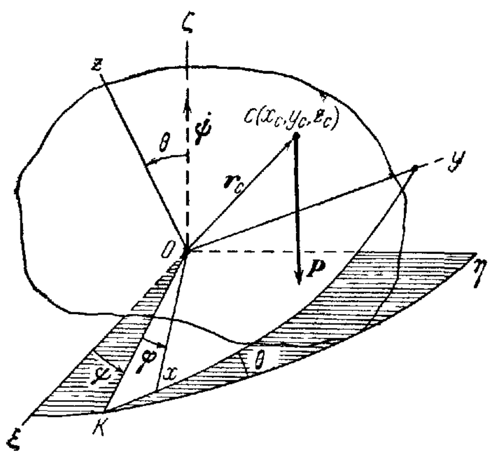


Рис. 59.

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\zeta, x}) &= \gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \\ \cos(\widehat{\zeta, y}) &= \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi, \\ \cos(\widehat{\zeta, z}) &= \gamma_3 = \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Очевидно, γ_1, γ_2, γ_3 суть проекции единичного вектора $\boldsymbol{\zeta}^0$ на подвижные оси. Поэтому

$$\boldsymbol{\zeta}^0 = \gamma_1 \boldsymbol{i} + \gamma_2 \boldsymbol{j} + \gamma_3 \boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ суть единичные векторы подвижных осей, связанных с телом.

Так как направление силы тяжести, или, что то же, направление оси $O\zeta$, неподвижно относительно Земли, то

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}^0}{dt} = 0,$$

или, употребляя символ локальной производной,

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}^0}{dt} \equiv \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\zeta}^0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\zeta}^0 = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\zeta}^0}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\zeta}^0 \equiv -\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

[1]) Выбирая таким образом основную систему ориентировки и рассматривая в качестве внешних сил, действующих на твердое тело, силу тяжести, направленную по вертикали в данном месте земной поверхности, мы в дальнейшем пренебрегаем влиянием суточного вращения Земли на движение твердого тела, имеющего закрепленную точку на поверхности Земли.

Проектируя обе части этого равенства на подвижные оси, мы получим уравнения, выведенные Пуассоном:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma_1}{dt}&=r\gamma_2-q\gamma_3,\\ \frac{d\gamma_2}{dt}&=p\gamma_3-r\gamma_1,\\ \frac{d\gamma_3}{dt}&=q\gamma_1-p\gamma_2.\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

Напишем динамические уравнения Эйлера. Сила тяжести $\boldsymbol{P}$ направлена противоположно оси ζ; следовательно,

$$\boldsymbol{P}=-P\boldsymbol{\zeta}^0.$$

Главный момент внешних сил равен

$$\boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{P}=-P\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{\zeta}^0=P\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\\ x_C&y_C&z_C\end{vmatrix}.$$

Таким образом, для рассматриваемого случая уравнения Эйлера примут вид

$$\left.\begin{aligned}A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr&=P\,(\gamma_2z_C-\gamma_3y_C),\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp&=P\,(\gamma_3x_C-\gamma_1z_C),\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq&=P\,(\gamma_1y_C-\gamma_2x_C).\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Система уравнений (14) и (15) есть система шести обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с шестью неизвестными функциями времени γ_1, γ_2, γ_3, p, q, r; величины A, B, C, x_C, y_C, z_C суть постоянные. Если γ_1, γ_2, γ_3, p, q, r найдены в функции t интегрированием системы (14) и (15), то для полного решения задачи, т. е. для определения эйлеровых углов в функции t, необходимо лишь из любого уравнения системы (7) найти $\psi(t)$ одной квадратурой, так как $\theta(t)$ и $\varphi(t)$, поскольку $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$ известны, непосредственно даются равенствами (12).

Итак, основная часть решения задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки состоит в отыскании шести интегралов системы (14) и (15). Однако легко доказать, что задача сводится всего лишь к отысканию одного интеграла. В самом деле, представим уравнения системы в каноническом виде:

$$\frac{dp}{\Pi}=\frac{dq}{Q}=\frac{dr}{R}=\frac{d\gamma_1}{\Gamma_1}=\frac{d\gamma_2}{\Gamma_2}=\frac{d\gamma_3}{\Gamma_3}=dt,\qquad(16)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\Pi&=\frac{1}{A}\,[P\,(\gamma_2z_C-\gamma_3y_C)-(C-B)\,qr],\quad \Gamma_1=r\gamma_2-q\gamma_3;\\ Q&=\frac{1}{B}\,[P\,(\gamma_3x_C-\gamma_1z_C)-(A-C)\,rp],\quad \Gamma_2=p\gamma_3-r\gamma_1;\\ R&=\frac{1}{C}\,[P\,(\gamma_1y_C-\gamma_2x_C)-(B-A)\,pq],\quad \Gamma_3=q\gamma_1-p\gamma_2.\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

Так как время t не входит явно ни в одну из функций (17), то вместо системы шести уравнений (16) можно интегрировать отдельно систему первых пяти уравнений, именно систему

$$\frac{dp}{\Pi}=\frac{dq}{Q}=\frac{dr}{R}=\frac{d\gamma_1}{\Gamma_1}=\frac{d\gamma_2}{\Gamma_2}=\frac{d\gamma_3}{\Gamma_3}.\qquad(16')$$

Если систему (16′) удастся проинтегрировать, то время t найдется простой квадратурой. Система (16′) имеет уже только пять интегралов.

Согласно теории последнего множителя Якоби для канонической системы дифференциальных уравнений[1]), этот множитель M для системы (16′) имеет значение $M=1$, так как

$$\frac{\partial\Pi}{\partial p}+\frac{\partial Q}{\partial q}+\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial\Gamma_3}{\partial\gamma_3}=0.$$

Но если последний множитель системы известен, то для приведения задачи к квадратурам достаточно знать не пять, а только четыре интеграла системы (16′).

Один из этих четырех интегралов получается непосредственно из простого геометрического соображения. Действительно, γ_1, γ_2, γ_3 суть направляющие косинусы оси $O\zeta$, или, что то же, проекции единичного вектора этой оси. Следовательно,

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1.\qquad(18)$$

Этот тривиальный интеграл можно получить и из уравнений (14). Умножая их соответственно на γ_1, γ_2, γ_3 и складывая почленно, получим

$$\gamma_1\frac{d\gamma_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\gamma_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\gamma_3}{dt}=0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)=0,$$

что и дает интеграл (18).

[1]) См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, М. — Л., 1946, гл. XL.

Итак, остается найти три интеграла. Первый из них получим, применяя теорему об изменении кинетического момента относительно оси $O\zeta$. Так как момент силы тяжести $\boldsymbol{P}$ относительно оси $O\zeta$ равен нулю, то

$$\frac{dG_\zeta}{dt} = M_\zeta = 0, \text{ и потому } G_\zeta = \text{const}.$$

Но

$$G_\zeta = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\zeta}^0 = (Ap\boldsymbol{i} + Bq\boldsymbol{j} + Cr\boldsymbol{k})\cdot(\gamma_1\boldsymbol{i} + \gamma_2\boldsymbol{j} + \gamma_3\boldsymbol{k}) = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3,$$

следовательно,

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}. \tag{19}$$

И этот интеграл (19) можно получить непосредственно из уравнений движения. В самом деле, умножая уравнения (15) соответственно на γ_1, γ_2, γ_3 и складывая их почленно, получим

$$A\gamma_1\frac{dp}{dt} + B\gamma_2\frac{dq}{dt} + C\gamma_3\frac{dr}{dt} = (B - C)\,\gamma_1 qr + (C - A)\,\gamma_2 rp + (A - B)\,\gamma_3 pq$$

Это равенство можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}(Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3) = (B - C)\,\gamma_1 qr + (C - A)\,\gamma_2 rp + (A - B)\,\gamma_3 pq + Ap\frac{d\gamma_1}{dt} + Bq\frac{d\gamma_2}{dt} + Cr\frac{d\gamma_3}{dt}.$$

Если теперь заменить в правой части производные функций γ_1, γ_2, γ_3 их выражениями из уравнений (14), то легко убедиться, что правая часть равенства тождественно равна нулю, и мы получим

$$\frac{d}{dt}(Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3) = 0.$$

Интегрируя, найдем интеграл (19).

Для получения второго из оставшихся трех интегралов применим теорему об изменении кинетической энергии, которая дает

$$dT = -P\,d\zeta_C,$$

где ζ_C обозначает координату центра тяжести тела относительно основной системы отсчета. Интегрируя, получим

$$T = -P\zeta_C + \text{const}.$$

Используя формулу (7′) § 15, дающую выражение для кинетической энергии, и учитывая, что

$$\zeta_C = \boldsymbol{r}_C\cdot\boldsymbol{\zeta}^0 = (x_C\boldsymbol{i} + y_C\boldsymbol{j} + z_C\boldsymbol{k})\cdot(\gamma_1\boldsymbol{i} + \gamma_2\boldsymbol{j} + \gamma_3\boldsymbol{k}) = x_C\gamma_1 + y_C\gamma_2 + z_C\gamma_3,$$

получим интеграл энергии в виде

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -P(x_C\gamma_1 + y_C\gamma_2 + z_C\gamma_3) + \text{const}. \tag{20}$$

Интеграл (20) также непосредственно находится из уравнений (15), если каждое из них умножить соответственно на $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ и получившиеся равенства сложить почленно. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{2}d(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -P[x_C(r\gamma_2 - q\gamma_3) + y_C(p\gamma_3 - r\gamma_1) + z_C(q\gamma_1 - p\gamma_2)]\,dt$$

или на основании уравнений Пуассона (14)

$$\frac{1}{2}d(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -P(x_C\,d\gamma_1 + y_C\,d\gamma_2 + z_C\,d\gamma_3).$$

Отсюда, интегрируя и учитывая, что x_C, y_C, z_C — величины постоянные, придем к равенству (20).

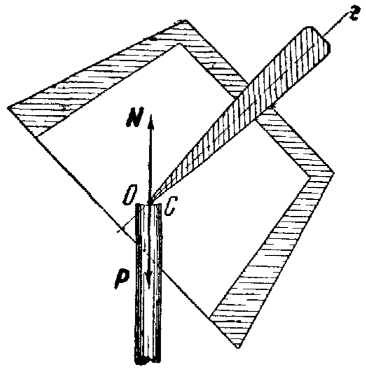


Рис. 60.

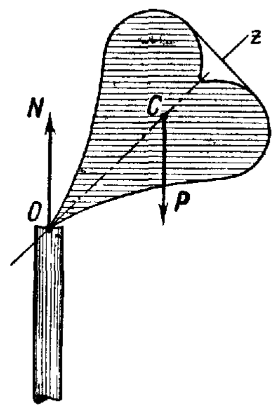


Рис. 61.

Остается найти еще только один интеграл; в этом и состоит главная трудность задачи. Найти этот третий общий интеграл удалось только для трех частных предположений относительно движущегося тела и условий движения. Эти три частных случая движения суть следующие:

1) *Случай Эйлера — Пуансо.* Это случай движения по инерции, когда равнодействующая внешних сил проходит через неподвижную точку O (рис. 60). В частном случае тяжелого твердого тела, исследованном Эйлером и Пуансо, неподвижная точка O совпадает с центром тяжести C. Других внешних сил, кроме силы тяжести, нет, а последняя уравновешивается реакцией опоры O. Само твердое тело может быть любой формы.

2) *Случай Лагранжа—Пуассона* (рис. 61). В этом случае эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки O, представляет

собой эллипсоид вращения, т. е. $A = B \neq C$, а центр тяжести C лежит на оси динамической симметрии (оси вращения эллипсоида инерции).

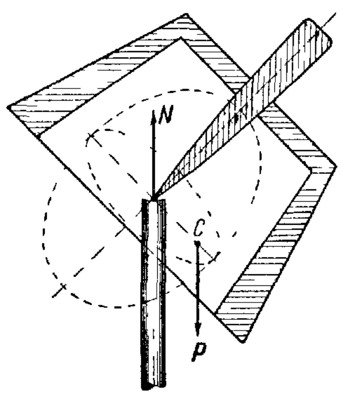


Рис. 62.

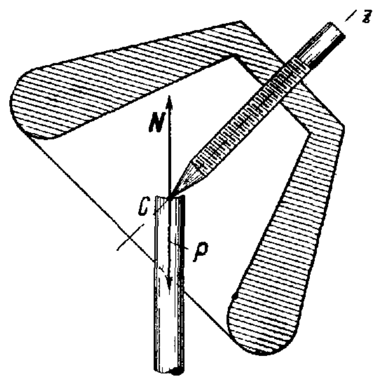


Рис. 63.

Такое тело, приведенное в быстрое вращение около оси симметрии, называется симметричным гироскопом.

3) *Случай С. В. Ковалевской* (рис. 62) В этом случае эллипсоид инерции для неподвижной точки есть вытянутый эллипсоид вращения, причем между главными моментами инерции существует соотношение

$$A = B = 2C,$$

а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Первый и второй случаи движения можно демонстрировать на волчке колоколообразной формы, вдоль оси динамической симметрии которого передвигается винт, благодаря чему можно привести точку опоры O (острие винта) в совпадение с центром тяжести или же поместить C вне точки опоры на оси винта (волчок Максвелла, рис. 63).

Случай С. В. Ковалевской можно иллюстрировать на очень простой модели — открытой коробочке в форме прямоугольного параллелепипеда с соответственно подобранными размерами (рис. 64) Направим ось Oz вдоль продольной оси симметрии внутренней стороны дна коробочки, а ось Ox — вдоль поперечной. За неподвижную точку опоры O возьмем центр симметрии дна. Тогда, подобрав размеры коробочки так, чтобы моменты

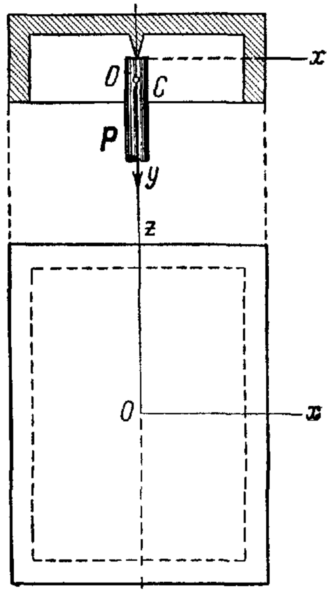


Рис. 64

инерции относительно осей Ox и Oy были равны, т. е. $A = B$, а $C = \frac{A}{2}$, мы получим иллюстрацию случая С. В. Ковалевской.

4. Некоторые сведения из теории эллиптических функций. Интеграл

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{21}$$

называется эллиптическим интегралом 1-го рода (в обозначении Якоби). Если сделать подстановку $x = \sin\varphi$, то интеграл примет вид

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi,\ k) \tag{22}$$

(в обозначении Лежандра).

Интеграл u есть функция верхнего предела φ. Обратная функция φ от u носит название «амплитуда» и обозначается

$$\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am} F(\varphi,\ k). \tag{23}$$

По определению Якоби эллиптическими функциями аргумента u называются тригонометрические функции от функции $\operatorname{am} u$, именно:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin\operatorname{am} u = \operatorname{sn} u, \\ \cos\varphi &= \cos\operatorname{am} u = \operatorname{cn} u \\ \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} &= \Delta\varphi = \Delta\operatorname{am} u = \operatorname{dn} u \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и

(средний столбец — обозначения Якоби, последний — Гудерманна; Δ обозначает оператор: $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$).

Очевидно также, что

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1. \tag{25}$$

Если модуль $k = 0$, то эллиптические функции $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ вырождаются в $\sin u$ и $\cos u$. Из равенств (22) и (24) следует, что $\operatorname{sn} 0 = 0$, $\operatorname{cn} 0 = 1$, $\operatorname{dn} 0 = 1$.

Из этих же равенств следует, что эллиптические функции Якоби являются функциями периодическими с действительным периодом, равным $4K$, где K есть эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{26}$$

§ 17. Случай Эйлера — Пуансо

1. Интегрирование уравнений движения. В случае Эйлера — Пуансо главный момент внешних сил, действующих на твердое тело, относительно неподвижной точки равен нулю, т. е. $\boldsymbol{M}_O = 0$, и динамические уравнения Эйлера примут вид

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=0,\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=0,\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Найдем первые интегралы уравнений (1), полагая, что $A \neq B \neq C$. Для этого умножаем уравнения (1) соответственно на p, q, r и складываем их почленно; получаем

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=0.$$

Интегрируя, находим

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=h, \qquad (2)$$

где h есть произвольная постоянная. Это есть интеграл энергии, так как левая часть равенства (2) есть удвоенная кинетическая энергия $2T$. [Интеграл (2) можно получить непосредственно из теоремы об изменении кинетической энергии, так как линия действия равнодействующей проходит все время через неподвижную точку и работа внешних сил равна нулю.]

Для нахождения второго интеграла умножим уравнения движения (2) соответственно на Ap, Bq, Cr и сложим их почленно; получим

$$A^2p\frac{dp}{dt}+B^2q\frac{dq}{dt}+C^2r\frac{dr}{dt}=0;$$

интегрируя, будем иметь

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2, \qquad (3)$$

где G есть произвольная постоянная, очевидно, равная квадрату кинетического момента. [Интеграл (3) можно непосредственно получить из теоремы об изменении кинетического момента. В самом деле, так как $\boldsymbol{M}_O=0$, следовательно, $\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=0$, а потому $\boldsymbol{G}=\text{const}$ и $G^2=\text{const}$.]

Для нахождения p, q, r в функции от t необходим еще третий интеграл, который можно получить следующим образом. Выразим

величины r и p через q, используя интегралы (2), (3), и предположим одновременно для определенности, что $A > B > C$. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} r^2=\frac{1}{C(A-C)}\,[Ah-G^2-B(A-B)\,q^2]=\frac{B(A-B)}{C(A-C)}\left(\lambda_1^2-q^2\right),\\ p^2=\frac{1}{A(A-C)}\,[G^2-Ch-B(B-C)\,q^2]=\frac{B(B-C)}{A(A-C)}\left(\lambda_2^2-q^2\right), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где вместо G и h введены новые постоянные λ_1 и λ_2 согласно равенствам

$$Ah-G^2=B(A-B)\,\lambda_1^2; \quad G^2-Ch=B(B-C)\,\lambda_2^2. \qquad (5)$$

При этом поскольку $p^2 \geqslant 0$, $r^2 \geqslant 0$ и $A > B > C$, то $\lambda_1^2 \geqslant q^2$, $\lambda_2^2 \geqslant q^2$; подстановка начальных данных в равенства (4) дает для λ_1 и λ_2 значения

$$\lambda_1^2=q_0^2+\frac{C(A-C)}{B(A-B)}\,r_0^2, \quad \lambda_2^2=q_0^2+\frac{A(A-C)}{B(B-C)}\,p_0^2. \qquad (6)$$

Теперь, подставляя во второе из уравнений (1) найденные значения r и p, получим

$$\frac{dq}{dt}=\pm\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}\sqrt{\left(\lambda_1^2-q^2\right)\left(\lambda_2^2-q^2\right)}.$$

Сохраняя справа знак плюс (выбор знака для окончательного вида решения не существен), разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$\sigma t+\alpha=\int_0^q\frac{dq}{\sqrt{\left(\lambda_1^2-q^2\right)\left(\lambda_2^2-q^2\right)}}, \qquad (7)$$

где α — постоянная интегрирования; при этом обозначено

$$\sigma=\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}. \qquad (8)$$

Из правой части равенства (7) следует, что зависимость $q(t)$ может быть представлена с помощью эллиптических функций Якоби. Вид этой зависимости окончательно определяется значениями постоянных λ_1 и λ_2, т. е. начальными условиями.

1) Если $\lambda_1 > \lambda_2$, то, полагая $q=\lambda_2\sin\varphi$, что всегда возможно, поскольку $q^2 \leqslant \lambda_2^2$, получим из (7)

$$\sigma t+\alpha=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}},$$

где $k_1=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Сравнивая интеграл, стоящий справа, с формулой (22) §16 и учитывая равенства (24) §16, заключаем, что $\sin\varphi=\operatorname{sn}(\lambda_1\sigma t+\alpha_1)$, где α_1 — новая постоянная; следовательно,

$$q=\lambda_2\operatorname{sn}(\lambda_1\sigma t+\alpha_1).$$

Если считать при $t=0$ $q=q_0$, то постоянная α_1 определяется равенством

$$\operatorname{sn}\alpha_1=\frac{q_0}{\lambda_2}.$$

Подставляя найденное значение q в правые части равенств (4) и учитывая соотношения (24), (25) § 16, и также, что $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=k_1$, легко определить величины p и r. Окончательно будем иметь

$$\left.\begin{aligned} p&=\lambda_2\sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}}\operatorname{cn}(\lambda_1\sigma t+\alpha_1),\\ q&=\lambda_2\operatorname{sn}(\lambda_1\sigma t+\alpha_1),\\ r&=\lambda_1\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}}\operatorname{dn}(\lambda_1\sigma t+\alpha_1).\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

2) Если $\lambda_1<\lambda_2$, то, полагая $q=\lambda_1\sin\varphi$ и вводя обозначение $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=k_2$, найдем таким же путем, что

$$\left.\begin{aligned} p&=\lambda_2\sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}}\operatorname{dn}(\lambda_2\sigma t+\alpha_2),\\ q&=\lambda_1\operatorname{sn}(\lambda_2\sigma t+\alpha_2),\\ r&=\lambda_1\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}}\operatorname{cn}(\lambda_2\sigma t+\alpha_2),\end{aligned}\right\}\qquad(9')$$

где α_2 находится из равенства

$$\operatorname{sn}\alpha_2=\frac{q_0}{\lambda_1}.$$

Кроме рассмотренных основных двух случаев, возможны еще следующие:

3) $\lambda_1=0$; при этом, как видно из равенств (4), должно быть все время $r=0$, $q=0$ (так как $A>B>C$, а $r^2>0$) и $p=\text{const}=p_0$; тело в этом случае совершает равномерное вращение вокруг оси x;

4) $\lambda_2=0$; в этом случае все время $p=0$, $q=0$ и $r=\text{const}=r_0$ — тело вращается равномерно вокруг оси z;

5) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$; в этом особом случае интеграл (7) вырождается в обыкновенный и p, q, r будут гиперболическими функциями аргумента $(\lambda\sigma t+\alpha)$.

Так как эллиптические функции суть функции периодические, то из равенств (9) следует, что p, q, r, а также ω суть функции периодические с действительным периодом $\tau_1=\frac{4K}{\lambda_1\sigma}$ (при $\lambda_1>\lambda_2$) или $\tau_2=\frac{4K}{\lambda_2\sigma}$ (при $\lambda_1<\lambda_2$), где K есть эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода, определяемый равенством (26) § 16.

Следовательно, по истечении периода τ мгновенная угловая скорость примет прежнее положение в теле (но не относительно основной системы ориентировки, что возможно, как показывает исследование, лишь в очень частном случае).

Чтобы довести задачу до конца, нужно еще выразить эйлеровы углы в функции времени, т. е проинтегрировать кинематические уравнения Эйлера (7) § 16 Так как в данном случае $\boldsymbol{M}_O=0$, то из теоремы об изменении кинетического момента

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\boldsymbol{M}_O$$

вытекает, что $\boldsymbol{G}=\text{const}$, т. е. кинетический момент $\boldsymbol{G}$ постоянен по модулю и по направлению. Если за неподвижную ось $O\zeta$ взять направление кинетического момента $\boldsymbol{G}$, то исследование упрощается.

Поскольку вектор $\dot{\psi}$ направлен вдоль оси ζ, то при выбранном направлении этой оси проекции $G_x=Ap$, $C_y=Bq$, и $C_z=Cr$ вектора $\boldsymbol{G}$ на оси x, y, z будут вычисляться так же, как проекции вектора $\dot{\psi}$, входящие в формулы (7) § 16; следовательно,

$$\left.\begin{aligned} Ap&=G\sin\theta\sin\varphi,\\ Bq&=G\sin\theta\cos\varphi,\\ Cr&=G\cos\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Из равенств (10) можно сразу найти формулы, определяющие $\varphi(t)$ и $\theta(t)$, если подставить в них вместо p, q, r их значения (9). Тогда, ограничиваясь случаем $\lambda_1>\lambda_2$ (при $\lambda_1<\lambda_2$ подсчеты аналогичны), получим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Ap}{Bq}=\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}\,\frac{\operatorname{cn}(\lambda_1\sigma t+\alpha_1)}{\operatorname{sn}(\lambda_1\sigma t+\alpha_1)},$$

$$\cos\theta=\frac{Cr}{G}=\frac{C\lambda_1}{G}\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}}\,dn(\lambda_1\sigma t+\alpha_1),$$

где постоянная G определяется равенством (3).

Для нахождения угла ψ берем первые две из формул (7) § 16. Умножая первую на $\sin\varphi$, вторую на $\cos\varphi$ и складывая, получим

$$p\sin\varphi+q\cos\varphi=\dot{\psi}\sin\theta,$$

откуда

$$\dot{\psi}=\frac{p\sin\varphi+q\cos\varphi}{\sin\theta}.$$

Теперь умножим сначала первые два из равенств (10) соответственно на p и q и сложим, затем возведем обе части их в квадрат и опять сложим; получим

$$Ap^2+Bq^2=G\sin\theta(p\sin\varphi+q\cos\varphi),$$

$$A^2p^2+B^2q^2=G^2\sin^2\theta.$$

Пользуясь этими равенствами, найдем, что

$$\dot\psi=\frac{p\sin\varphi+q\cos\varphi}{\sin\theta}=G\,\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}.$$

Подставляя сюда значения p и q из равенств (9) и учитывая соотношение (25) § 16, будем окончательно иметь

$$\dot\psi=G\,\frac{(B-C)+(A-B)\,\mathrm{sn}^2(\lambda_1\sigma t+\alpha_1)}{A(B-C)+C(A-B)\,\mathrm{sn}^2(\lambda_1\sigma t+\alpha_1)}.$$

Отсюда ψ найдется квадратурой от эллиптических функций:

$$\psi=G\int\limits_0^t\frac{(B-C)+(A-B)\,\mathrm{sn}^2(\lambda_1\sigma t+\alpha_1)}{A(B-C)+C(A-B)\,\mathrm{sn}^2(\lambda_1\sigma+\alpha_1)}\,dt+\psi_0.$$

Так как функция $\mathrm{sn}(\lambda_1\sigma t+\alpha_1)$ имеет период $\tau=\frac{4K}{\lambda_1\sigma}$, то

$$\dot\psi(t+\tau)-\dot\psi(t)=0.$$

Интегрируя по t, получим

$$\psi(t+\tau)-\psi(t)=c,$$

где c есть постоянная интегрирования. Функция ψ уже не будет периодической; по истечении промежутка времени τ она получает приращение, равное c. В этом и заключается причина, что $\boldsymbol{\omega}$ займет по истечении периода $\tau=\frac{4K}{\lambda_1 n}$, вообще говоря, другое положение в пространстве, если только случайно не окажется, что приращение $c=2\pi$.

2. Интегрирование уравнений движения в частном случае, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. В частном случае, когда эллипсоид инерции относительно неподвижной точки есть эллипсоид вращения, интегрирование уравнений движения для случая Эйлера — Пуансо доводится до конца в элементарных функциях. Действительно, в этом случае $B=A$, кроме

того, $\boldsymbol{M}_O=0$, и уравнения Эйлера принимают вид

$$\left.\begin{aligned}A\frac{dp}{dt}+(C-A)\,qr&=0,\\ A\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp&=0,\\ C\frac{dr}{dt}\qquad\qquad&=0.\end{aligned}\right\}$$

Умножая обе части этих уравнений соответственно на p, q, r, а затем на Ap, Bq, Cr, складывая полученные выражения и интегрируя, найдем два первых интеграла уравнений движения

$$A(p^2+q^2)+Cr^2=h,$$

$$A^2(p^2+q^2)+C^2r^2=G^2.$$

Кроме того, третье из уравнений Эйлера дает интеграл

$$r=r_0=\mathrm{const}.$$

Второй из найденных интегралов выражает, что модуль кинетического момента G постоянен; но вектор $\boldsymbol{G}$ постоянен и по направлению (относительно основной системы). Для доведения интегрирования до конца, т. е. для получения углов φ, ψ, θ в функции времени t, примем во внимание неизменность направления кинетического момента $\boldsymbol{G}$.

Для простоты вычислений направим ось $O\zeta$ основной системы по направлению вектора $\boldsymbol{G}$; тогда проекции кинетического момента на подвижные оси будут определяться равенствами (10), т. е.

$$\left.\begin{aligned}Ap&=G\sin\theta\sin\varphi,\\ Aq&=G\sin\theta\cos\varphi,\\ Cr&=G\cos\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(10')$$

Из последнего уравнения в системе (10′) следует, что

$$\cos\theta=\frac{Cr}{G}=\frac{Cr_0}{G}.$$

Так как C, r_0 и G суть постоянные, то угол $\theta=\mathrm{const}=\theta_0$. Кинематические уравнения Эйлера (7) § 16 дают при $\theta=\theta_0$

$$p=\dot\psi\sin\theta_0\sin\varphi.$$

Подставляя это значение p в первое из уравнений (10′), получим

$$A\dot\psi\sin\theta_0\sin\varphi=G\sin\theta_0\sin\varphi$$

или

$$A\dot\psi=G,$$

откуда

$$\dot\psi=\frac{G}{A}=\mathrm{const}=n.$$

Интегрируя, получим

$$\psi = nt + \psi_0,$$

где ψ_0 есть начальное значение ψ. Наконец, подставляя $r = r_0$ (третий интеграл) и $\theta = \theta_0$ в третье из уравнений (7) § 16, получим

$$r_0 = \dot\psi \cos\theta_0 + \dot\varphi,$$

или, учитывая, что $\dot\psi = \mathrm{const} = n$,

$$r_0 = n\cos\theta_0 + \dot\varphi,$$

откуда

$$\dot\varphi = r_0 - n\cos\theta_0;$$

следовательно, $\dot\varphi$ тоже постоянно; полагая

$$\dot\varphi = n_1,$$

получим

$$\varphi = n_1 t + \varphi_0,$$

где φ_0 есть значение φ при $t = 0$. Итак, мы нашли, что

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0, \\ \psi &= nt + \psi_0, \\ \varphi &= n_1 t + \varphi_0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Движение, определяемое уравнениями (11), есть регулярная прецессия, рассмотренная кинематически в § 14, п. 2. Здесь $\omega_1 = n_1$, а $\omega_2 = n$, причем постоянные θ_0, n, n_1 связаны между собой соотношением

$$r_0 - n\cos\theta_0 = n_1.$$

3. Геометрическая интерпретация Пуансо для движения твердого тела около неподвижной точки по инерции. В историческом развитии механики методы аналитический и геометрический имели самостоятельное значение. Нередко оба метода проникали друг в друга, и замечательным примером этого является геометрическая интерпретация движения твердого тела с одной неподвижной точкой для случая Эйлера, данная Пуансо.

Возьмем, как и раньше, за подвижную систему ориентировки систему с началом в неподвижной точке O и с осями, направленными по главным осям эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки O. Уравнение этого эллипсоида инерции пусть будет

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \qquad (12)$$

Будем, согласно Пуансо, называть полюсом P точку пересечения мгновенной оси вращения (т. е. мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$) с эллипсоидом инерции. Обозначим через $\boldsymbol{\rho}$ радиус-вектор полюса P относительно неподвижной точки; тогда

$$\overline{OP} = \boldsymbol{\rho} = \rho\boldsymbol{\omega}^0 = \rho\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}. \qquad (13)$$

Докажем три теоремы, положенные Пуансо в основу его интерпретации.

1) *Проекция мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на направление кинетического момента есть величина постоянная.*

В самом деле, проекция $\boldsymbol{\omega}$ на неподвижный в пространстве вектор $\boldsymbol{G}$ есть

$$\omega_G = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{G}^0 = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{G}}{G} = \frac{2T}{G} = \frac{h}{G} = \mathrm{const}, \qquad (14)$$

что вытекает из формулы (4) § 15 и интегралов уравнений движения (2) и (3). Следует обратить внимание на то, что формула

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{G}^0 = \frac{2T}{G}$$

справедлива и для общего случая движения твердого тела около неподвижной точки.

Введем обозначения

$$\frac{G^2}{h} = D \quad \text{и} \quad \frac{h}{G} = \mu, \qquad (15)$$

причем D и μ будут, очевидно, постоянны; тогда

$$G = D\mu, \quad h = D\mu^2, \qquad (15')$$

причем, согласно равенству (14),

$$\mu = \omega_G,$$

т. е. равно проекции мгновенной угловой скорости на направление кинетического момента. Размерность D такая же, как размерность момента инерции. В самом деле, в системе CGS

$$[D] = \frac{[h]}{[\mu^2]} = \left[\frac{ml^2}{t^{-2}t^2}\right] = [ml^2].$$

2) *Длина радиуса-вектора полюса ρ пропорциональна величине угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.*

Действительно, из равенства (13) имеем для координат полюса P выражения

$$x = \rho\frac{p}{\omega}, \quad y = \rho\frac{q}{\omega}, \quad z = \rho\frac{r}{\omega}. \qquad (16)$$

Подставляя эти координаты в уравнение (12) эллипсоида инерции, которому они должны удовлетворять, получим

$$\frac{\rho^2}{\omega^2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=1,$$

а потому, согласно равенству (2),

$$\frac{\rho^2}{\omega^2}h=1,$$

откуда следует

$$\omega=\rho\sqrt{h}. \tag{17}$$

Другими словами, отношение модуля угловой скорости к радиусу-вектору полюса P равно $\sqrt{h}$.

3) *Касательная плоскость к эллипсоиду инерции в полюсе P перпендикулярна к кинетическому моменту $\mathbf{G}$ и находится на постоянном расстоянии от неподвижной точки, т. е. эта плоскость неподвижна относительно основной системы ориентировки.*

Первая часть теоремы (перпендикулярность $\mathbf{G}$ касательной плоскости к эллипсоиду инерции в точке пересечения мгновенной оси вращения, т. е. в полюсе) имеет место для общего случая движения твердого тела около неподвижной точки и уже доказана в § 15, п. 4 настоящей главы. Докажем вторую часть, т. е. постоянство расстояния касательной плоскости к эллипсоиду инерции в полюсе от точки O.

Уравнение плоскости, касающейся эллипсоида инерции (12) в полюсе $P(x,\ y,\ z)$ имеет вид

$$AxX+ByY+CzZ=1, \tag{18}$$

где $X,\ Y,\ Z$ суть текущие координаты этой касательной плоскости, а $x,\ y,\ z$ — координаты полюса. Известно, что расстояние какой-либо точки $(x',\ y',\ z')$ от плоскости (18) дается формулой

$$\delta=\frac{Axx'+Byy'+Czz'-1}{-\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}.$$

В нашем случае точка $(x',\ y',\ z')$ есть начало координат O, следовательно, $x'=0,\ y'=0,\ z'=0$, и поэтому

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}.$$

В выражении под знаком корня заменим координаты полюса P значениями (16), затем преобразуем полученное выражение, пользуясь

равенствами (3), (17) и (15); получим

$$A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2=\frac{\rho^2}{\omega^2}(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)=\frac{\rho^2}{\omega^2}G^2=$$
$$=\frac{\rho^2G^2}{\rho^2h}=\frac{G^2}{h}=D. \tag{18'}$$

Следовательно,

$$\delta=\frac{\sqrt{h}}{G}=\frac{1}{\sqrt{D}}. \tag{19}$$

Формулу (19) можно получить из следующих простых соображений. Расстояние δ от неподвижной точки до касательной плоскости равно проекции радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}$ на направление вектора кинетического момента (рис. 65), т. е.

$$\delta=\rho\cos(\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{G}^0)=\rho\cos(\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{G}^0)=\rho\cdot\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{G}^0}{\omega}=\rho\cdot\frac{h}{G\rho\sqrt{h}}=\frac{\sqrt{h}}{G}.$$

Доказанные положения являются основанием для построения геометрической картины движения твердого тела в случае Эйлера, данной Пуансо.

Так как плоскость, касающаяся эллипсоида инерции в полюсе P, не только сохраняет постоянное направление в пространстве (перпендикулярна к кинетическому моменту $\mathbf{G}$, неподвижному для рассматриваемого случая Эйлера), но и отстоит от неподвижной точки O на постоянном расстоянии [согласно теореме 3, формула (19)], то она неподвижна относительно основной системы; эта плоскость называется неподвижной плоскостью или плоскостью Пуансо. Обозначим ее буквой Π.

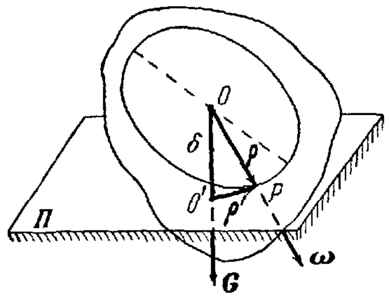


Рис. 65.

Эллипсоид инерции, связанный с телом, все время касается плоскости Π в полюсе P. Так как полюс P по определению есть точка тела, представляющая пересечение эллипсоида инерции (центр которого находится в неподвижной точке O) с мгновенной осью вращения, то скорость точки касания P равна нулю. Следовательно движение твердого тела около неподвижной точки по инерции можно геометрически представить как качение без скольжения (и верчение) эллипсоида инерции с неподвижным центром O по неподвижной плоскости Π (рис. 65). Вместе с эллипсоидом инерции движется и связанное с ним твердое тело. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена по радиусу-вектору $\overline{OP}=\boldsymbol{\rho}$ точки прикосновения и по теореме 2 изменяется пропорционально длине OP, т. е.

$$\omega=\sqrt{h}\cdot OP.$$

Мгновенная ось вращения OP, меняя свое положение в теле, опишет коническую поверхность (подвижной аксоид), которая будет пересекаться с эллипсоидом инерции по кривой, описываемой полюсом P и называемой *полодией*. Подвижной аксоид называется также конусом полодий. На плоскости Пуансо полюс P также опишет некоторую кривую, называемую *герполодией*. Неподвижный аксоид имеет вершину в точке O, и направляющей ему служит герполодия; у подвижного аксоида вершина находится также в O, а направляющей является полодия. Поэтому движение тела можно еще представить как качение без скольжения подвижного аксоида по неподвижному с мгновенной угловой скоростью $\omega = OP \cdot \sqrt{h}$.

4. Полодии. Так как полодия лежит на эллипсоиде инерции, то текущие координаты точек полодии должны удовлетворять уравнению эллипсоида инерции (12):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \tag{12}$$

С другой стороны, расстояние неподвижной точки O до плоскости Пуансо постоянно и дается формулой (18′), которую можно записать в виде

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D = \frac{1}{\delta^2}. \tag{20}$$

Уравнения (12) и (20) определяют аналитически полодию как геометрическое место точек, лежащих на эллипсоиде (12), причем касательная плоскость к эллипсоиду в этих точках находится на постоянном расстоянии δ от точки O. Так как уравнение (20) есть также уравнение некоторого эллипсоида, то полодия есть кривая пересечения двух эллипсоидов и, следовательно, замкнутая алгебраическая кривая четвертого порядка.

Для удобства исследования уравнения (12) и (20) можно преобразовать. Умножим обе части уравнения (12) на D и вычтем из уравнения (20); получим

$$A(A-D)x^2 + B(B-D)y^2 + C(C-D)z^2 = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) есть уравнение конуса с вершиной в начале координат O — неподвижной точке; ему удовлетворяют координаты точек подвижного аксоида. Следовательно, (21) есть уравнение конуса полодий, или подвижного аксоида. В пересечении с эллипсоидом инерции (12) конус полодий дает полодию.

Чтобы иметь возможность сравнивать получаемые ниже результаты с тем, что было найдено в п. 1 аналитическим путем, заметим, что, согласно равенствам (5) и (15), постоянные λ_1, λ_2 связаны с D зависимостями

$$B(A-B)\lambda_1^2 = (A-D)h, \quad B(B-C)\lambda_2^2 = (D-C)h. \tag{22}$$

Исследуем изменение вида полодии в зависимости от различных значений D, т. е. при различных расстояниях плоскости Π от неподвижной точки [см. формулу (19)], или, иными словами, при различных начальных условиях движения. Для определенности предположим, как раньше, что $A > B > C$, т. е. что эллипсоид инерции трехосный, причем наибольшая ось направлена по оси z, наименьшая — по оси x и средняя — по оси y. Наибольшей оси будет соответствовать наименьший момент инерции, т. е. C, а наименьшей оси — наибольший момент инерции, т. е. A. В самом деле, величины полуосей эллипсоида инерции будут определяться равенствами

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}},$$

следовательно, $a < b < c$.

Чтобы конус полодий был действительным, коэффициенты уравнения (21) должны иметь разные знаки, т. е. необходимо, чтобы

$$A \geqslant D \geqslant C,$$

или по (19)

$$a \leqslant \delta \leqslant c.$$

В противном случае, если, например, было бы $D > A$, то конус был бы мнимым и в пересечении с эллипсоидом инерции не давал бы ни одной действительной точки; движение было бы невозможно, что ясно и геометрически, так как в этом случае $\frac{1}{\sqrt{D}} < \frac{1}{\sqrt{A}}$, $\delta < a$, т. е. расстояние неподвижной плоскости от неподвижной точки было бы меньше наименьшей полуоси a эллипсоида инерции. Также ясно, что невозможен и случай $D < C$, $\delta > c$, так как тогда плоскость Π совсем не может касаться эллипсоида. Заметим, что соотношение $A \geqslant D \geqslant C$ следует и из равенств (22).

Рассмотрим сначала три частных случая:

1) $D = A$. Уравнение конуса полодий (21) примет вид

$$B(B-A)y^2 + C(C-A)z^2 = 0;$$

в этом случае конус вырождается в пару мнимых плоскостей

$$y = \pm\sqrt{-\frac{C(A-C)}{B(A-B)}}\, z,$$

пересекающихся по оси Ox, так как это уравнение удовлетворяется при $y = 0$, $z = 0$ и, следовательно, конус полодий сводится к одной действительной прямой Ox — малой оси эллипсоида инерции. Это ясно и геометрически, так как в этом случае расстояние плоскости Π от неподвижной точки равно $\delta = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{A}} = a$, т. е. малой оси эллипсоида, а полодия и герполодия сводятся к одной точке касания O' — концу малой оси. Твердое тело будет все время вращаться вокруг малой оси эллипсоида инерции с постоянной угловой скоростью.

Действительно, если тело начало вращаться около малой оси эллипсоида инерции, то векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{G}$ коллинеарны и, следовательно, проекция $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{G}$ будет иметь в начальный момент наибольшую величину. Но по теореме 1) [формула (14)] проекция $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{G}$ есть величина постоянная, а поэтому тело будет продолжать вращаться около оси Ox с постоянной начальной угловой скоростью, ибо при нарушении этого движения проекция $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{G}$ уменьшится.

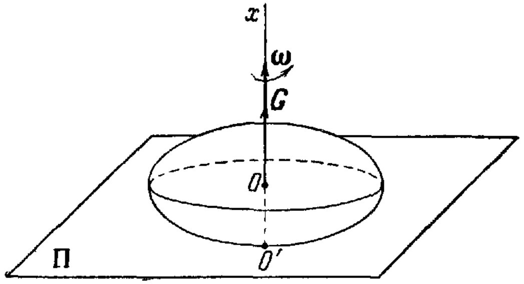


Рис. 66.

Итак, движение твердого тела будет перманентным вращением вокруг малой полуоси эллипсоида инерции (рис. 66). Поскольку, как видно из (22), при $D = A$ $\lambda_1 = 0$, этот вывод совпадает с полученным в п. 1 [см. п. 1, случай 3)].

2) $D = C$. В этом случае в уравнении (21) пропадет последний член, и конус опять распадается на пару мнимых плоскостей

$$x = \pm \sqrt{-\frac{B(B-C)}{A(A-C)}}\, y,$$

пересекающихся по большой оси эллипсоида инерции Oz. Полодия и герполодия вырождаются в точку касания, лежащую на конце оси z. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, убедимся, что движение твердого тела будет перманентным вращением вокруг большой оси эллипсоида инерции (рис. 67). При аналитическом решении этот случай, как видно из (22), соответствует $\lambda_2 = 0$ и дает тот же результат [п. 1, случай 4)].

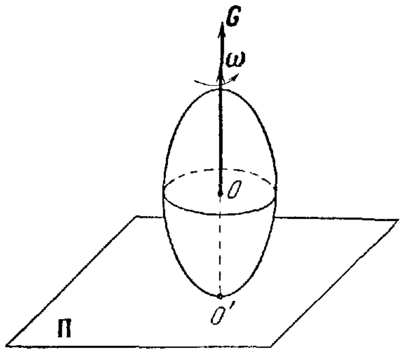


Рис. 67.

3) $D = B$. В этом случае конус распадается также на две, но уже действительные плоскости, уравнения которых будут

$$z = \pm \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}}\, x.$$

Эти плоскости пересекаются по средней оси Oy эллипсоида инерции и в пересечении с эллипсоидом инерции дают два действительных

эллипса, которые и представляют полодию для данного случая (KL и MN на рис. 68, дающем вид со стороны оси y). Для средней оси эллипсоида инерции кинетический момент $\boldsymbol{G}$ также коллинеарен с $\boldsymbol{\omega}$; поэтому ось y также является свободной осью вращения, но вращение вокруг нее не будет устойчивым (см. ниже, п. 6).

Рассмотрим теперь основные случаи. Если $A > D > B$, то $a < \delta < b$. Полодия в этом случае состоит из двух замкнутых ветвей, окружающих концы малой оси Ox (рис. 68), являющейся осью конуса полодий; это следует из уравнения (21), в котором первый коэффициент положителен, а остальные два отрицательные. Замкнутость полодий следует геометрически из того, что касание эллипсоида инерции с плоскостью П должно после полного оборота произойти в той же точке.

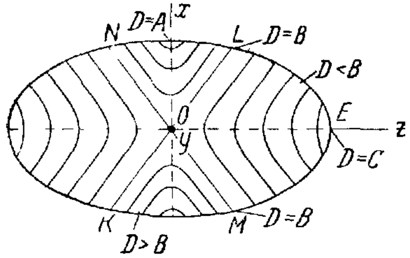


Рис. 68.

Если $B > D > C$, то $b < \delta < c$. Обе ветви полодии суть замкнутые кривые, окружающие концы большой оси Oz эллипсоида инерции, которая является осью для конуса (21). Примерный вид полодий при различных значениях D изображен на рис. 68.

Различным начальным условиям движения соответствуют разные значения D, а следовательно, и различные полодии. Полодии делятся на два класса: один окружает вершину малой оси эллипсоида, а другой — вершину большой оси. Обе группы разделены особенной переходной полодией — парой эллипсов, соответствующих значению $D = B$.

Условие $D < B$, при котором полодии окружают конец большой оси эллипсоида, как видно из равенства (22), соответствует рассмотренному в п. 1 случаю, когда $\lambda_1 > \lambda_2$; движение в этом случае определяется уравнениями (9).

При условии же $D > B$, когда полодии окружают конец малой оси, будет $\lambda_1 < \lambda_2$, и движение определяется уравнениями (9′).

В промежуточном случае, когда $D = B$ (полодии распадаются на два эллипса) будет, как видно из (22), $\lambda_1 = \lambda_2$; это соответствует рассмотренному в п. 1 случаю 5), когда решение упрощается и эллиптические функции переходят в гиперболические.

5. Герполодия. Не входя в аналитическое исследование, которое требует применения эллиптических функций, сделаем лишь замечание о виде герполодии. Обозначим по-прежнему через O' основание перпендикуляра, опущенного из неподвижной точки O на плоскость П (см. рис. 65). Тогда $OP = \rho$, $O'P = \rho'$, и из прямоугольного треугольника $O'OP$ следует

$$O'P = \sqrt{OP^2 - OO'^2}, \quad \text{или} \quad \rho' = \sqrt{\rho^2 - \delta^2}.$$

Так как полодия есть замкнутая кривая, окружающая конец одной из крайних полуосей эллипсоида инерции, и притом симметрично расположенная относительно этого конца, то радиус-вектор полодии $OP=\rho$ имеет некоторый минимум ρ_1 и максимум ρ_2; тогда из записанного выше равенства следует, что

$$\sqrt{\rho_1^2-\delta^2}\leqslant\rho'\leqslant\sqrt{\rho_2^2-\delta^2},$$

т. е. герполодия заключена между двумя концентрическими окружностями с центром в O' и с радиусами $\rho_1'=\sqrt{\rho_1^2-\delta^2}$ и $\rho_2'=\sqrt{\rho_2^2-\delta^2}$.

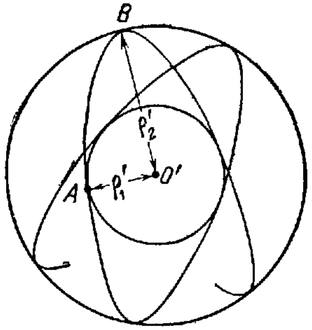


Рис. 69.

В противоположность полодии, которая есть кривая замкнутая, герполодия, вообще говоря, будет уже незамкнутой кривой, вид которой показан на рис. 69; при этом, как можно доказать, герполодия поочередно касается окружностей $\rho_1'=\text{const}$, $\rho_2'=\text{const}$ и не имеет точек перегиба. Дуга герполодии AB есть четверть дуги полодии; после того как полюс P придет снова в то же положение на эллипсоиде инерции и, следовательно, опишем полную полодию, радиус-вектор герполодии повернется на угол, равный $4\,\widehat{AO'B}$. Если угол $AO'B$ несоизмерим с π, то герполодия никогда не замкнется; в противном случае герполодия будет замкнутой кривой.

6. Устойчивость вращения вокруг главных осей эллипсоида инерции. Рассмотрение геометрической картины Пуансо позволяет сделать заключение об устойчивости вращения вокруг каждой из трех осей эллипсоида инерции.

Понятие об устойчивости движения по отношению к тем или иным его характеристикам аналогично понятию устойчивости равновесия (§ 10). Закон движения механической системы определяется действующими силами и начальными условиями. Происходящее при заданных силах и начальных условиях движение называют невозмущенным. Если в какой-либо момент времени точкам системы сообщить малые возмущения (т. е. малые дополнительные смещения или скорости) и если после этого значение какой-нибудь из характеристик движения будет все время оставаться близким к ее значениям в невозмущенном движении, то невозмущенное движение по отношению к указанной характеристике называют устойчивым, а в противном случае — неустойчивым.

Рассмотрим вопрос об устойчивости вращательного движения тела с неподвижной точкой вокруг его главных осей инерции; при этом нас будет интересовать вопрос об устойчивости по отношению к сохранению модуля и направления вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Движение будем считать устойчивым, если при малом возмущении численная величина и направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ во все последующее время будут мало отклоняться от его начальной постоянной величины ω_0 и начального направления, совпадающего с направлением главной оси инерции; в противном случае это движение неустойчиво.

Заключение об устойчивости (или неустойчивости) для рассматриваемого движения можно сделать по расположению полодий на эллипсоиде инерции.

Если твердое тело вращается вокруг большой оси эллипсоида инерции (оси z, совпадающей с осью ζ), то при весьма малом возмущении, которое вызовет изменение начального направления мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, эллипсоид инерции перестанет касаться плоскости Пуансо в одной точке (конце большой полуоси), а станет катиться, касаясь плоскости Пуансо вдоль точек одной из полодий, окружающих конец большой полуоси и очень близких к вершине E (см. рис. 68). При этом угол отклонения вектора $\boldsymbol{\omega}$ от первоначального направления будет мал и численно ω будет мало отличаться от ω_0, что следует из равенства (14). Следовательно, согласно сказанному выше, вращение вокруг большой оси эллипсоида инерции будет устойчивым. То же рассуждение можно повторить и для малой оси эллипсоида, и, следовательно, вращение твердого тела вокруг большой или малой оси эллипсоида инерции является устойчивым.

Напротив, вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции оказывается неустойчивым. В самом деле, при весьма малом возмущении вращения вокруг средней оси эллипсоида инерции Oy новое движение будет осуществляться качением эллипсоида по плоскости Π, причем геометрическим местом точек прикосновения будет служить одна из полодий, весьма близкая с кривой, составленной из каких-либо половин двух эллипсов KL и MN (см. рис. 68). Эта полодия будет конечных размеров; тогда в последующем движении и модуль и направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ будут значительно отличаться от их начальных значений, и следовательно, движение будет неустойчивым. То обстоятельство, что движение при этом одинаково вероятно по любой из достаточно близких полодий, лежащих в четырех областях, на которые разделяется двумя эллипсами KL и MN поверхность эллипсоида инерции, характерно для неустойчивого вращения вокруг оси Oy и существенно отличает этот случай от вращения вокруг большой и малой осей, когда возмущенное движение осуществляется качением эллипсоида инерции вдоль весьма близкой полодии, лежащей в той же области эллипсоида, что и конец соответствующей полуоси, которую полодия окружает.

В § 12 (п. 3) было доказано, что главные оси эллипсоида инерции являются свободными осями вращения твердого тела. Докажем обратное, т. е. что если ось вращения твердого тела с неподвижной точкой, на которое не действуют никакие внешние силы, перманентна (т. е. сохраняет неизменное направление относительно тела), то эта ось есть одна из главных осей эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки. Так как ось перманентная, то проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на подвижные оси будут

$$p = \alpha\omega, \qquad q = \beta\omega, \qquad r = \gamma\omega, \tag{23}$$

где α, β, γ суть постоянные направляющие косинусы угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, которая по условию имеет постоянное направление относительно тела. Докажем, что $\boldsymbol{\omega}$ постоянна не только по направлению относительно подвижной системы, но и по модулю. В самом деле, подставляя значения (23) в интеграл энергии (2), получим уравнение

$$2T \equiv \omega^2 (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = h,$$

из которого следует, что $|\boldsymbol{\omega}| = \mathrm{const}$, а следовательно, постоянны и вектор $\boldsymbol{\omega}$ и его проекции p, q, r. Уравнения Эйлера (1) для случая постоянных p, q, r примут вид

$$(C - B)\,qr = 0, \qquad (A - C)\,rp = 0, \qquad (B - A)\,pq = 0. \tag{24}$$

Отсюда следует, что если эллипсоид инерции трехосный ($A > B > C$), то, чтобы удовлетворить уравнениям (24), надо принять две из проекций угловой скорости равными нулю; это и доказывает, что единственные перманентные оси тела суть главные оси эллипсоида инерции. Если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, например, если $A = B$, то, чтобы удовлетворить уравнениям (24), надо положить или $r = 0$, или $p = q = 0$; но равенство $r = 0$ показывает, что любое направление в плоскости экватора Oxy есть перманентная ось, а из равенства $p = q = 0$ следует, что ось Oz также является перманентной осью. Если эллипсоид инерции есть сфера, т. е. если $A = B = C$, то уравнениям (24) удовлетворяют любые значения p, q, r, т. е. любая ось будет перманентной.

7. Герполодограф. Недостаток геометрической интерпретации Пуансо заключается в том, что в ней движение вполне задано геометрически качением эллипсоида инерции по плоскости Пуансо, но кинематические обстоятельства движения приходится осуществлять дополнительно. Если осуществить материально аксоиды с вершинами в неподвижной точке O (и ограниченные: неподвижный — герполодией, а подвижный — полодией), то для полного воспроизведения движения недостаточно просто катить подвижный конус по неподвижному, а необходимо катить так, чтобы угловая скорость, направленная вдоль общей образующей OP, равнялась $\omega = OP \cdot \sqrt{h}$ [формула (17)]. Реально осуществить такой закон изменения угловой скорости на основании геометрической интерпретации Пуансо невозможно.

Дарбу и Кенигс восполнили указанный пробел следующим образом Разложим угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ на две составляющие: $\boldsymbol{\omega}_1$ вдоль вектора $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ — параллельно плоскости Π (рис. 70), так что

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Согласно доказанному в п. 3 [формула (14)] первая составляющая $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_G$ постоянна; изменяется, следовательно, только $\boldsymbol{\omega}_2$.

Проведем через точку O плоскость Π', параллельную плоскости Π, и заставим плоскость Π' вращаться равномерно с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ вокруг вектора $\boldsymbol{G}$. Тогда угловая скорость эллипсоида инерции относительно плоскости Π' будет равна $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$. Во время движения вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ будет занимать различные положения относительно тела и опишет в теле некоторый конус K (второго порядка, как это можно доказать). Если этот конус K осуществить материально, то движение можно представить как качение конуса K по подвижной плоскости Π' с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$.

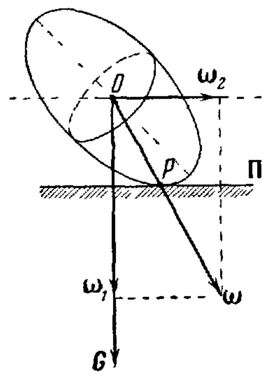


Рис. 70.

Осуществим материально плоскость Π, эллипсоид инерции, конус K и плоскость Π', могущую равномерно вращаться с заданной угловой скоростью вокруг вектора $\boldsymbol{G}$; при этом предположим, что либо все эти поверхности шероховатые, либо связаны одна с другой соответствующими зубчатыми зацеплениями. Если теперь эллипсоид инерции будет катиться с надлежащей угловой скоростью $\omega = OP \cdot \sqrt{h}$ по неподвижной плоскости Π, воспроизводя действительное движение, то конус K заставит соприкасающуюся с ним плоскость Π' вращаться равномерно с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Если, напротив, заставить вращаться только плоскость Π' с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, то плоскость Π', соприкасаясь с конусом K, передаст движение эллипсоиду инерции, который, катясь по плоскости Π, осуществит действительное движение. Кенигс и Дарбу построили соответствующий прибор, названный герполодографом (рис 71) потому, что материально осуществленный эллипсоид, катясь по плоскости Π, вычерчивает на этой плоскости герполодию.

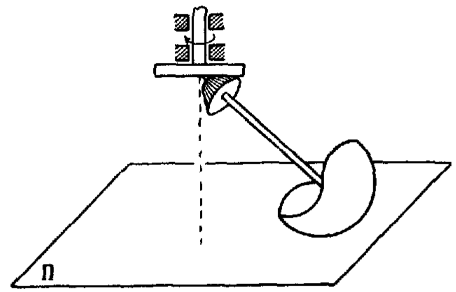


Рис. 71.

§ 18. Случай Лагранжа — Пуассона

1. Уравнения движения симметричного тяжелого гироскопа и качественное исследование. В случае Лагранжа — Пуассона эллипсоид инерции твердого тела относительно неподвижной точки есть эллипсоид вращения, т. е. $A=B$, и центр тяжести тела лежит на оси вращения эллипсоида инерции, т. е. на оси динамической симметрии. Такое тело, имеющее неподвижную точку, часто называют симметричным гироскопом. Заметим, что если однородное твердое тело имеет ось геометрической симметрии, то эта ось будет также и осью динамической симметрии, но не наоборот.

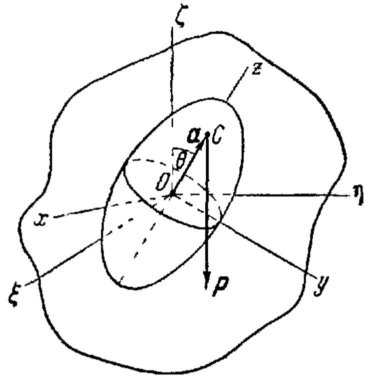


Рис. 72.

По-прежнему свяжем с телом подвижную систему ориентировки $Oxyz$ (рис 72) и направим ось Oz по оси динамической симметрии с положительным направлением от O к центру тяжести C. Ось $O\zeta$ основной системы отсчета направим вертикально вверх. Обозначим радиус-вектор центра тяжести C относительно O через $\boldsymbol{a}$ (0, 0, a), а направляющие косинусы вертикальной оси $O\zeta$ относительно подвижных осей — через γ_1, γ_2, γ_3; их выражения через углы Эйлера определяются формулами (12) § 16. Проекции силы тяжести на подвижные оси имеют значения $\boldsymbol{P}(-P\gamma_1,\ -P\gamma_2,\ -P\gamma_3)$. Составим динамические уравнения Эйлера. Момент внешней силы относительно неподвижной точки O будет

$$\boldsymbol{M}_O=\mathrm{mom}_O\,\boldsymbol{P}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{P}=P\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix},$$

следовательно,

$$M_x=Pa\gamma_2,\qquad M_y=-Pa\gamma_1,\qquad M_z=0.$$

Тогда динамические уравнения Эйлера примут вид

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=Pa\gamma_2,\\ &B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=-Pa\gamma_1,\\ &C\frac{dr}{dt}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

К этим уравнениям необходимо еще присоединить кинематические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} p&=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\\ q&=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,\\ r&=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

При общей постановке задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки (§ 16, п. 3) было выяснено, что кроме тривиального интеграла $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$ необходимо для решения задачи отыскать еще три интеграла. Применим теорему об изменении кинетической энергии

$$dT=-P\,d\zeta_C,$$

где ζ_C есть координата центра тяжести относительно основной системы отсчета. Очевидно, что $\zeta_C=(\boldsymbol{a})_\zeta=a\gamma_3$. Интегрируя и заменяя кинетическую энергию T ее выражением (7') § 15, получим интеграл энергии

$$A(p^2+q^2)+Cr^2=-2Pa\gamma_3+h;\tag{3}$$

при этом учтено, что $A=B$.

Для получения второго из интегралов применим теорему об изменении кинетического момента в проекции на ось $O\zeta$. Получим

$$\frac{d}{dt}(G_\zeta)=0,$$

поскольку $M_\zeta=0$; следовательно,

$$G_\zeta=\mathrm{const}.$$

Но так как

$$G_\zeta=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\zeta}^0=(Ap\boldsymbol{i}+Aq\boldsymbol{j}+Cr\boldsymbol{k})\cdot(\gamma_1\boldsymbol{i}+\gamma_2\boldsymbol{j}+\gamma_3\boldsymbol{k})=$$
$$=A(p\gamma_1+q\gamma_2)+Cr\gamma_3,$$

то окончательно будем иметь

$$A(p\gamma_1+q\gamma_2)+Cr\gamma_3=\mathrm{const}.\tag{4}$$

Третий интеграл получаем из третьего уравнения системы (1):

$$r=\mathrm{const}.\tag{5}$$

Заметим, что интегралы (3) и (4) можно получить и непосредственно из уравнений (1), как это было показано в § 16, п. 3.

Введем в полученные интегралы эйлеровы углы. Возводя обе части первых двух уравнений системы (2) в квадрат и складывая их почленно, получим

$$p^2+q^2=\dot\psi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2.$$

Кроме того, $\gamma_3 = \cos\theta$. Если, наконец, постоянную величину Cr^2 объединить с h, то интеграл (3) примет вид

$$A(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + 2Pa\cos\theta = h_1, \tag{6}$$

где $h_1 = h - Cr^2$.

Далее, умножая два первых из уравнений (2) соответственно на γ_1, γ_2 и принимая во внимание равенства (12) § 16, получим

$$p\gamma_1 = \dot{\psi}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi,$$
$$q\gamma_2 = \dot{\psi}\sin^2\theta\cos^2\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi.$$

Отсюда после почленного сложения находим

$$p\gamma_1 + q\gamma_2 = \dot{\psi}\sin^2\theta.$$

В результате интеграл (4) преобразуется к виду

$$A\dot{\psi}\sin^2\theta + Cr\cos\theta = b. \tag{7}$$

Наконец, интеграл (5) после замены r его значением из кинематических уравнений Эйлера (2) примет вид

$$\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = r = \text{const}. \tag{8}$$

Входящие в интегралы (6), (7), (8) постоянные h_1, b и r определяются по начальным условиям.

Для отыскания закона изменения в зависимости от времени эйлеровых углов φ, ψ и θ необходимо проинтегрировать систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (6), (7) и (8). Неизвестное φ в уравнения (6) и (7) не входит, поэтому уравнения (6) и (7) можно интегрировать отдельно от уравнения (8).

Определяя из уравнения (7) $\dot{\psi}$ (скорость прецессии), получим

$$\dot{\psi} = \frac{b - Cr\cos\theta}{A\sin^2\theta}. \tag{9}$$

Затем, разрешая уравнение (6) относительно $\dot{\theta}^2$, будем иметь

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h_1 - 2Pa\cos\theta}{A} - \dot{\psi}^2\sin^2\theta;$$

подставляя сюда вместо $\dot{\psi}$ его значение (9), найдем

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h_1 - 2Pa\cos\theta}{A} - \frac{(b - Cr\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta}. \tag{10}$$

Уравнение (10) дает выражение для квадрата скорости нутации. Интегрирование этого уравнения можно довести до конца; θ выразится в виде эллиптической функции времени. Затем, подставляя найденное значение θ в уравнения (9) и (8), можно найти ψ и φ в виде квадратур от эллиптических функций. Не проводя до конца

этого интегрирования, проведем на основании вида дифференциального уравнения (10) качественное исследование характера движения, дающее достаточно ясное представление о всех его особенностях.

Преобразуем уравнение (10) к виду

$$A^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 = A(h_1 - 2Pa\cos\theta)\sin^2\theta - (b - Cr\cos\theta)^2 \tag{10'}$$

и введем новое переменное s, полагая

$$\cos\theta = s, \quad -\sin\theta\cdot\dot{\theta} = \frac{ds}{dt}. \tag{11}$$

Тогда уравнение (10′) примет вид

$$A^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = f(s), \tag{12}$$

где обозначено

$$f(s) = A(h_1 - 2Pas)(1 - s^2) - (b - Crs)^2. \tag{13}$$

Исследуем корни уравнения $f(s) = 0$, т. е. найдем те значения s, при которых $\frac{ds}{dt}$ обращается в нуль. Легко видеть, что уравнение $f(s) = 0$ будет иметь три действительных корня. В самом деле, из равенства (13) следует, что

$$f(-1) = -(b - Crs)^2 < 0,$$
$$f(+1) = -(b - Crs)^2 < 0,$$
$$f(+\infty) = +\infty.$$

Последнее соотношение имеет место потому, что член $f(s)$ со старшей степенью s имеет вид $+2PaAs^3$.

Так как $s = \cos\theta$ и $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, то для действительного движения должно иметь место $-1 \leqslant s \leqslant 1$. А ввиду того, что и $\frac{ds}{dt}$ должно быть действительным, а не мнимым, выражение $f(s)$ должно быть положительным в некотором интервале, лежащем между -1 и $+1$ соответствующем действительному движению. Но так как при $s = -1$ и $s = +1$ $f(s) < 0$, а в упомянутом интервале $f(s) > 0$, то между $s = -1$ и $s = +1$ существуют два действительных корня $f(s)$, которые обозначим через s_1 и s_2. Кроме того, так как $f(+\infty) = +\infty$, то за значением $s = +1$ функция $f(s)$ имеет еще один действительный корень s_3 [примерный график функции $f(s)$ изображен на рис. 73].

Воспользуемся проведенным исследованием для общей характеристики движения симметричного гироскопа и применим для этой цели сферическое изображение. Опишем сферу единичного радиуса с центром в неподвижной точке O и отложим от точки O вдоль положительного направления оси динамической симметрии гироскопа Oz единичный вектор $\overline{AO} = \boldsymbol{\alpha}^0$; конец его A, называемый апексом, будет все время двигаться по построенной сфере. Движение апекса A по сфере полностью изобразит движение оси Oz, т. е. прецессию и нутацию гироскопа.

Исследуем сначала, как изменяется при движении гироскопа угол нутации θ. Так как $s = \cos\theta$, то из заключения, что для действительного движения s находится в границах $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, вытекает,

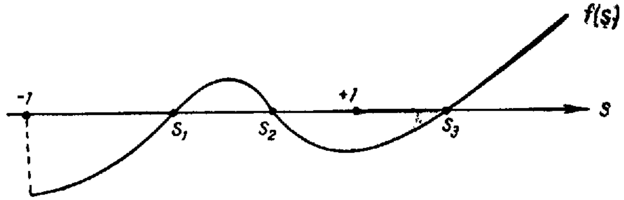


Рис. 73.

что $\cos\theta_1 \leqslant \cos\theta \leqslant \cos\theta_2$, где θ_1 и θ_2 — углы, соответствующие корням s_1 и s_2; следовательно,

$$\theta_1 \geqslant \theta \geqslant \theta_2.$$

Это двойное неравенство означает, что сферическая кривая, которую описывает апекс, заключена между двумя параллелями A_1A_1' и A_2A_2', плоскости которых перпендикулярны к вертикальной оси $O\zeta$ и отстоят от O на расстояниях $\zeta_1 = \cos\theta_1$ и $\zeta_2 = \cos\theta_2$. Ось Oz во все время движения будет находиться между двумя конусами с общей вершиной O и направляющими A_1A_1' и A_2A_2' (рис. 74). Так как из равенства (11) следует, что

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\cos\theta}{dt} = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

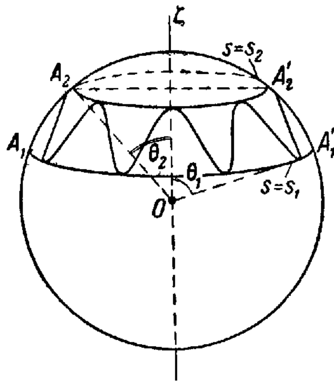


Рис. 74.

и так как $\theta \neq 0$, ибо этот угол заключен между θ_1 и θ_2, то $\frac{d\theta}{dt}$ обращается в нуль одновременно с $\frac{ds}{dt}$. Тогда из уравнения (12) следует, что $\frac{d\theta}{dt} = 0$ только для корней уравнения $f(s) = 0$, т. е. когда траектория апекса достигает граничных параллелей A_1A_1' и A_2A_2'.

Следовательно, изменять направление нутационного движения (от движения вниз на движение вверх и наоборот) ось гироскопа может только на параллелях A_1A_1', A_2A_2'.

Таким образом, траектория апекса будет иметь вообще вид волнистой сферической кривой, заключенной между параллелями A_1A_1' и A_2A_2' и идущей от одной параллели к другой. При этом время движения t_{12} от параллели A_1A_1' до A_2A_2' остается постоянным и равным времени t_{21} движения от параллели A_2A_2' до A_1A_1', т. е. нутационное движение является колебательным с периодом $T = 2t_{12}$. В самом деле, из уравнения (12) следует, что $A\dot{s} = \pm\sqrt{f(s)}$, где знак плюс берется, когда $\dot{s} > 0$, т. е. когда s растет от s_1 до s_2, и знак минус — при убывании s от s_2 до s_1. Тогда

$$t_{12} = A\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\sqrt{f(s)}}; \qquad t_{21} = A\int_{s_2}^{s_1}\frac{ds}{-\sqrt{f(s)}} = A\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\sqrt{f(s)}}.$$

Таким образом, величины t_{12} и t_{21} определяются одним и тем же интегралом, причем нетрудно показать, что этот интеграл имеет конечное значение; следовательно, $t_{12} = t_{21} = \text{const}$.

Если корни s_1 и s_2 очень близки друг к другу, то параллели A_1A_1' и A_2A_2' очень сближены, траектория апекса извивается в узкой полосе между ними, мало отличаясь от окружности, а ось гироскопа вращается (прецессирует) вокруг оси $O\zeta$, испытывая очень малые колебания; имеет место так называемая псевдорегулярная прецессия.

Рассмотрим теперь, какой вид может иметь траектория апекса между ограничивающими ее параллелями. Это зависит от характера прецессионного движения, т. е. от условий скорости прецессии $\dot{\psi}$, определяемой формулой (9)

$$\dot{\psi} = \frac{b - Cr\cos\theta}{A\sin^2\theta}. \tag{9}$$

Поскольку в знаменателе здесь стоит величина существенно положительная, то направление прецессии будет зависеть от значения постоянной b, т. е. от начальных условий. Возможны следующие случаи:

1) $b > Cr\cos\theta_2$ (или $b < Cr\cos\theta_1$). Поскольку во все время движения $\cos\theta \leqslant \cos\theta_2$ (и $\cos\theta > \cos\theta_1$), то в этом случае $\dot{\psi}$ имеет все время один и тот же знак и никогда не обращается в нуль, т. е. гироскоп прецессирует все время в одном и том же направлении. При этом на параллелях A_1A_1' и A_2A_2' скорость $\dot{\theta}$ обращается в нуль и ось гироскопа имеет только скорость $\dot{\psi}$; следовательно, траектория апекса касается граничных параллелей. В итоге заключаем, что траектория апекса будет в данном случае иметь вид кривой, показанной на рис. 74.

2) $b = Cr\cos\theta_2$. В этом случае $\dot{\psi}$ также имеет все время один и тот же знак, но на верхней параллели A_2A_2' обращается в нуль. Так как на этой параллели и $\dot{\theta} = 0$, то у траектории апекса на па-

раллели A_2A_2' будут точки возврата. Таким образом, траектория апекса имеет в этом случае вид сферической циклоиды, изображенной на рис. 75.

Заметим, что случай $b = Cr\cos\theta_1$ физически невозможен, так как тогда на параллели A_1A_1' было бы одновременно $\dot\psi = 0$, $\dot\theta = 0$, а потенциальная энергия гироскопа при $\theta = \theta_1$ имеет минимум (центр тяжести гироскопа занимает наинизшее положение); следовательно, в последующем движении от параллели A_1A_1' к A_2A_2', когда будет $\dot\psi \neq 0$, $\dot\theta \neq 0$, должны одновременно возрастать и кинетическая и потенциальная энергии гироскопа, что противоречит закону сохранения энергии. Таким образом, траектория апекса с точками возврата на нижней параллели невозможна.

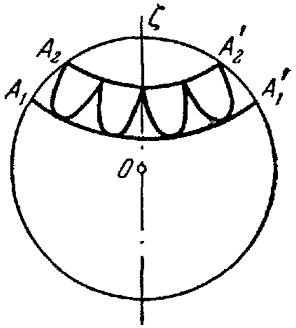


Рис. 75.

3) $Cr\cos\theta_1 < b < Cr\cos\theta_2$. В этом случае, пока $\cos\theta_1 \leqslant \cos\theta < b$, угловая скорость прецессии $\dot\psi > 0$, а при $b < \cos\theta \leqslant \cos\theta_2$ будет $\dot\psi < 0$. Следовательно, при угле $\theta = \theta^*$, определяемом равенством $\cos\theta^* = b$, направление прецессии изменяется. Траектория апекса будет петлеобразной кривой, напоминающей по виду трохоиду (рис. 76). При этом из соображений, аналогичных высказанным при рассмотрении предыдущего случая 2), следует, что петли траектории могут располагаться только вблизи верхней параллели A_2A_2'.

Рассмотрим частный пример. Пусть в начальный момент $t = 0$, $\dot\varphi = \dot\varphi_0$, $\dot\psi = 0$, $\dot\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$, т. е. гироскопу сообщают собственное вращение с угловой скоростью $\dot\varphi_0$ и отпускают ось без толчка, наклонив ее под углом θ_0 к вертикали. Подставляя эти начальные данные в уравнения (6) и (7), находим, что в данном случае $h_1 = 2Pa\cos\theta_0$, $b = Cr_0\cos\theta_0$, и равенство (13) принимает вид

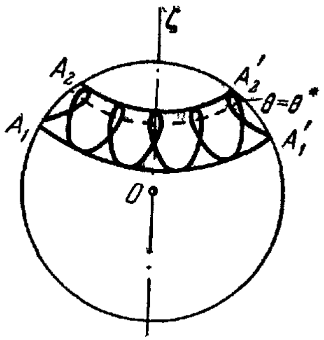


Рис. 76.

$$f(s) = 2PaA(s_0 - s)(1 - s^2) - Cr(s_0 - s)^2,$$

где $s_0 = \cos\theta_0$. Отсюда следует, что одним из корней уравнения $f(s) = 0$ будет $s = s_0$ (или $\theta = \theta_0$). Но, как было установлено выше при рассмотрении случая 2), возможно только равенство $b = Cr\cos\theta_2$. Следовательно, в данном случае $\theta_2 = \theta_0$, т. е. параллель A_2A_2', ограничивающая траекторию апекса сверху, определяется начальным

положением оси гироскопа. Траектория апекса имеет вид, изображенный на рис. 75, где $\theta_2 = \theta_0$.

В заключение отметим, что при особых начальных условиях может иметь место случай, когда оба корня s_1 и s_2 уравнения $f(s) = 0$ будут равны друг другу ($s_1 = s_2$); тогда $\theta_1 = \theta_2$ и апекс описывает окружность параллели, а ось гироскопа — круглый конус вокруг вертикали $O\zeta$, т. е. движение будет представлять собой регулярную прецессию.

2. Приближенное интегрирование уравнений движения симметричного тяжелого гироскопа. В большинстве случаев для практических целей бывает достаточно иметь приближенное решение уравнений движения гироскопа. Найдем такое приближенное решение для симметричного тяжелого гироскопа при следующих начальных условиях:

$$t_0 = 0,\ \dot\varphi_0 = \omega,\ \dot\psi_0 = 0,\ \dot\theta_0 = 0; \quad \varphi = \varphi_0,\ \psi = \psi_0,\ \theta = \theta_0,$$

т. е. рассмотрим случай, когда гироскоп в начальный момент получает угловую скорость ω вращения вокруг своей оси динамической симметрии Oz, которая в этот момент образует угол θ_0 с вертикалью.

Подставляя эти начальные данные в равенства (6), (7) и (8), найдем, что в этом случае $r = \omega$, $h_1 = 2Pa\cos\theta_0$, $b = C\omega\cos\theta_0$. Тогда уравнение (10) примет вид

$$\dot\theta^2 = \frac{2Pa}{A}(\cos\theta_0 - \cos\theta) - \frac{C^2\omega^2}{A^2\sin^2\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2$$

или, вынося первый член правой части за скобку,

$$\dot\theta^2 = \frac{2Pa}{A}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[1 - \frac{C^2\omega^2}{2PaA\sin^2\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right]. \qquad (14)$$

Из результатов, полученных в п. 1, следует, что во все время движения $\cos\theta \leqslant \cos\theta_0$ [1]) и, следовательно, $\theta \geqslant \theta_0$. Левая часть уравнения (14) существенно положительна; один из множителей правой части, именно $\cos\theta_0 - \cos\theta$, по доказанному больше нуля, следовательно, второй множитель, т. е. выражение в квадратных скобках, должен быть существенно положителен, а для этого необходимо, чтобы второй член в квадратных скобках был меньше единицы.

Будем в дальнейшем рассматривать случай, обычно имеющий место на практике, когда начальная угловая скорость ω гироскопа, а с нею произведение $C\omega$, называемое собственным моментом гиро-

[1]) Это ясно и из того, что если бы было $\cos\theta > \cos\theta_0$, то выражение в квадратных скобках уравнения (14) было бы положительным, а следовательно, вся правая часть этого уравнения была бы отрицательной, что невозможно, так как левая часть $\dot\theta^2$ существенно положительна.

скопа (начальный кинетический момент гироскопа), настолько велики, что выполняется неравенство

$$C^2\omega^2 \gg 2PaA.$$

Но в таком случае, чтобы второй член в квадратных скобках был меньше единицы, необходимо, чтобы множитель при нем (т. е. величина $\cos\theta_0 - \cos\theta$) был достаточно мал. Это в свою очередь будет иметь место тогда, когда очень мала разность $\theta - \theta_0$, а потому можно положить

$$\theta = \theta_0 + u, \tag{15}$$

где u есть весьма малая положительная величина (угол, на который изменяется начальное значение угла нутации). В дальнейшем будем ограничиваться в выражениях тригонометрических функций членами первого порядка малости относительно u и полагать

$$\cos u \approx 1, \quad \sin u \approx u.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \cos(\theta_0 + u) = \cos\theta_0\cos u - \sin\theta_0\sin u \approx \cos\theta_0 - u\sin\theta_0, \\ \sin\theta &= \sin(\theta_0 + u) = \sin\theta_0\cos u + \cos\theta_0\sin u \approx \sin\theta_0 + u\cos\theta_0; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

отсюда

$$\cos\theta_0 - \cos\theta \approx u\sin\theta_0. \tag{17}$$

Поскольку мы считали $C^2\omega^2 \gg 2PaA$, то для удержания в квадратной скобке правой части уравнения (14) членов одинакового порядка, необходимо в множителе при $\frac{C^2\omega^2}{2PaA}$ сохранить член с u. Вычисляя этот множитель с учетом равенств (16), (17), получим

$$\begin{aligned} \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} &\approx \frac{u\sin\theta_0}{\sin^2\theta_0 + 2u\sin\theta_0\cos\theta_0} = \frac{u}{\sin\theta_0(1 + 2u\operatorname{ctg}\theta_0)} = \\ &= \frac{u}{\sin\theta_0}(1 - 2u\operatorname{ctg}\theta_0 + \ldots) \approx \frac{u}{\sin\theta}. \end{aligned} \tag{18}$$

Кроме того, из соотношения (15) следует, что $\dot\theta = \frac{du}{dt}$. В результате уравнение (14) заменится следующим приближенным уравнением:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2Pau\sin\theta_0}{A}\left[1 - \frac{C^2\omega^2 u}{2PaA\sin\theta_0}\right],$$

или

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{C^2\omega^2}{A^2}u\left[\frac{2PaA\sin\theta_0}{C^2\omega^2} - u\right]. \tag{19}$$

Введем обозначения

$$\frac{C\omega}{A} = \alpha, \quad \frac{2PaA\sin\theta_0}{C^2\omega^2} = \beta; \tag{20}$$

Тогда уравнение (19) примет вид

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \alpha^2 u(\beta - u),$$

откуда

$$\frac{du}{dt} = \alpha\sqrt{u(\beta - u)}. \tag{21}$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{du}{\sqrt{u(\beta - u)}} = \alpha\, dt. \tag{22}$$

Таким образом, задача свелась к квадратуре. Для окончательного интегрирования сделаем подстановку

$$u = \beta\sin^2\varepsilon; \tag{23}$$

тогда

$$du = 2\beta\sin\varepsilon\cos\varepsilon\, d\varepsilon.$$

Уравнение (22) после подстановки (23) примет вид

$$\frac{2\beta\sin\varepsilon\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{\beta\sin^2\varepsilon(\beta - \beta\sin^2\varepsilon)}} = \alpha\, dt,$$

или, после сокращения,

$$d\varepsilon = \frac{\alpha}{2}\, dt.$$

Интегрируя, получим

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2}t + c_1.$$

Подставляя это значение ε в равенство (23), находим

$$u = \beta\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}t + c_1\right).$$

Для определения постоянной интегрирования c_1 учтем начальные условия: $u = 0$ при $t = 0$. Тогда

$$0 = \beta\sin^2 c_1, \text{ откуда } c_1 = 0$$

и

$$u = \beta\sin^2\left(\frac{\alpha t}{2}\right).$$

Заменяя здесь константы α и β их значениями (20), будем иметь

$$u = \frac{2PaA\sin\theta_0}{C^2\omega^2}\sin^2\left(\frac{C\omega}{2A}t\right). \tag{24}$$

Наконец, подставляя этот результат в равенство (15), получим окончательно следующее выражение для угла нутации:

$$\theta = \theta_0 + \frac{2PaA\sin\theta_0}{C^2\omega^2}\sin^2\left(\frac{C\omega}{2A}t\right). \tag{25}$$

Из равенства (25) видно, что угол нутации периодически изменяется от значения θ_0 до значения

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2PaA\sin\theta_0}{C^2\omega^2}.$$

Следовательно, если вокруг вертикальной оси описать два конуса с углами раствора при вершине $2\theta_0$ и $2\theta_1$, то ось гироскопа будет все время находиться в пространстве между этими конусами (рис. 77). Период изменения угла нутации будет, согласно уравнению (25), равен

$$T = \frac{2\pi A}{C\omega}. \qquad (26)$$

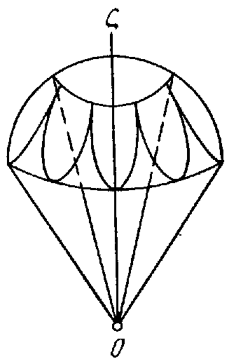


Рис. 77.

Формулы (26) и (25) показывают, что чем больше собственный кинетический момент гироскопа, тем меньше период нутации (больше частота) и теснее границы θ_0 и θ_1, между которыми колеблется (нутирует) ось гироскопа. Сказанным объясняется явление, состоящее в том, что волчок, приведенный в быстрое вращение, издает звук (жужжание) тем более высокого тона, чем больше скорость вращения.

Найдем выражение скорости прецессии. Для этого воспользуемся интегралом (7). При принятых начальных условиях $r = \omega$, $b = C\omega\cos\theta_0$ и этот интеграл дает

$$A\dot{\psi}\sin^2\theta = C\omega(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

откуда

$$\dot{\psi} = \frac{C\omega}{A}\cdot\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta_0}.$$

Заменяя здесь последний множитель в правой части его приближенным значением (18), будем иметь

$$\dot{\psi} = \frac{C\omega u}{A\sin\theta_0}.$$

Наконец, заменяя u его значением (24), найдем окончательно следующее приближенное выражение для скорости прецессии:

$$\dot{\psi} = \frac{2Pa}{C\omega}\sin^2\left(\frac{C\omega}{2A}t\right). \qquad (27)$$

Таким образом, мы приближенно определили законы прецессии и нутации быстро вращающегося тяжелого гироскопа при принятых начальных условиях.

Осью нутации является линия узлов, а осью прецессии — неподвижная вертикальная ось $O\zeta$. Закон изменения угла нутации дается

формулой (25). Из этой формулы следует, что ось собственного вращения Oz колеблется в плоскости $O\zeta z$ (вокруг линии узлов) около некоторого среднего своего положения. Величина $\dot{\psi}$ есть скорость вращения линии узлов или плоскости $O\zeta z$ (перпендикулярной к линии узлов) вокруг оси $O\zeta$. Ось собственного вращения совершает, следовательно, сложное движение. Из равенства (27) следует, что скорость прецессии $\dot{\psi}$ сохраняет в нашем случае все время один и тот же знак, одинаковый со знаком ω; следовательно, ось собственного вращения прецессирует (вращается вокруг оси $O\zeta$) все время в одном и том же направлении, причем, если гироскоп вращается вокруг оси в каком-либо направлении, то и его ось поворачивается вокруг вертикали в том же направлении. Из формулы (27) также заключаем, что период для изменения скорости прецессии тот же, что и для угла нутации. Одновременно из формул (25) и (27) вытекает, что

$$\theta - \theta_0 = \frac{A\sin\theta_0}{C\omega}\dot{\psi}.$$

Отсюда видно, что при минимуме угла нутации, т. е. при $\theta = \theta_0$, скорость прецессии равна нулю, т. е. тоже минимальная, а при максимуме угла нутации, т. е. при наибольшем отклонении оси собственного вращения от вертикали, имеется и максимум скорости прецессии, равный $\frac{2Pa}{C\omega}$. Следовательно, траекторией апекса будет сферическая циклоида, касающаяся нижней параллели ($\theta = \theta_1$) и имеющая точки заострения на верхней параллели ($\theta = \theta_2 = \theta_0$), т. е. как и было установлено в п. 1 [при принятых начальных условиях имеет место второй из рассмотренных в п. 1 случаев (см. рис. 75)]. При этом опускание оси собственного вращения сопровождается возрастанием скорости ее вращения вокруг оси $O\zeta$ и наоборот.

Когда скорость собственного вращения гироскопа очень велика, изменение угла нутации настолько мало и незаметно (границы θ_0 и θ_1 очень близки друг к другу), что прецессия кажется регулярной. Такая нерегулярная прецессия, мало отличающаяся от регулярной, называется, как было уже сказано в п. 1, псевдорегулярной прецессией. Для псевдорегулярной прецессии вводится понятие средней скорости прецессии, которая определяется как среднее значение скорости прецессии $\dot{\psi}$ за промежуток времени, равный периоду прецессии.

Согласно определению среднего значения функции в некотором интервале изменения ее аргумента средняя скорость прецессии будет равна

$$\tilde{\dot{\psi}} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}\dot{\psi}\,dt,$$

где t_1 есть произвольно взятый момент времени. Легко показать, что $\tilde{\dot\psi}$ не зависит от момента t_1. В самом деле, заменяя величину $\dot\psi$ под знаком интеграла ее выражением (27), получим

$$\tilde{\dot\psi}=\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T}\frac{2Pa}{C\omega}\sin^2\left(\frac{C\omega t}{2A}\right)dt.$$

Делая подстановку $t=t_1+\tau$, найдем

$$\tilde{\dot\psi}=\frac{Pa}{TC\omega}\int\limits_0^T 2\sin^2\frac{C\omega(t_1+\tau)}{2A}\,d\tau=$$

$$=\frac{Pa}{TC\omega}\int\limits_0^T\left[1-\cos\frac{C\omega}{A}(t_1+\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{Pa}{TC\omega}\left[\tau-\frac{A}{C\omega}\sin\frac{C\omega}{A}(t_1+\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=T}=$$

$$=\frac{Pa}{TC\omega}\left[T-\frac{A}{C\omega}\sin\frac{C\omega}{A}(t_1+T)+\frac{A}{C\omega}\sin\frac{C\omega t_1}{A}\right].$$

Последние два члена внутри квадратной скобки взаимно уничтожаются, что обнаруживается, если представить в них значение T из равенства (26). Итак,

$$\tilde{\dot\psi}=\frac{Pa}{C\omega}. \tag{28}$$

Среднюю скорость псевдорегулярной прецессии можно определить также как постоянную скорость некоторой воображаемой регулярной прецессии, при которой воображаемый апекс, двигаясь равномерно, описывает дугу параллели между двумя точками прикосновения концов ветви траектории настоящего апекса в то же самое время (период T), в которое настоящий апекс описывает ветвь своей траектории (двигаясь неравномерно). Поскольку мы в ходе расчетов считали величину $C\omega$ большой, то из формул (28) или (27) следует, что при принятых начальных условиях угловая скорость прецессии будет величиной малой, т. е. имеет место медленная прецессия.

Найдем, наконец, зависимость угла прецессии от времени. Интегрируя равенство (27), получим

$$\psi-\psi_0=\int\limits_0^t\dot\psi\,dt=\frac{Pa}{C\omega}\int\limits_0^t 2\sin^2\left(\frac{C\omega}{2A}t\right)dt=\frac{Pa}{C\omega}\int\limits_0^t\left[1-\cos\frac{C\omega t}{A}\right]dt=$$

$$=\frac{Pa}{C\omega}\left[t-\frac{A}{C\omega}\sin\frac{C\omega t}{A}\right]_0^t=\frac{Pa}{C\omega}\left[t-\frac{A}{C\omega}\sin\frac{C\omega t}{A}\right];$$

окончательно

$$\psi=\psi_0+\frac{Pa}{C\omega}\left[t-\frac{A}{C\omega}\sin\frac{C\omega t}{A}\right]. \tag{29}$$

Из равенства (29) следует, что *угол прецессии будет постоянно* возрастать, что, впрочем, следует и из равенства (27), так как производная $\dot\psi$ положительна. Итак, ось собственного вращения будет вращаться вокруг вертикали все время в одном и том же направлении. Изменение угла прецессии может быть представлено графически, если вычертить графики двух функций

$$\psi_1=\psi_0+\frac{Pa}{C\omega}t \quad \text{и} \quad \psi_2=-\frac{PaA}{C^2\omega^2}\sin\frac{C\omega t}{A},$$

т. е. прямую и синусоиду, а затем сложить их ординаты; тогда

$$\psi=\psi_1+\psi_2.$$

Если собственный кинетический момент гироскопа $C\omega$ очень велик, то можно, раскрыв скобки, пренебречь третьим членом в формуле (29); тогда для угла прецессии получим приближенную формулу

$$\psi=\psi_0+\frac{PA}{C\omega}t. \tag{30}$$

Из этой формулы можно было бы также получить найденную выше среднюю скорость прецессии (28).

Последняя из величин, характеризующих движение гироскопа, т. е. $\dot\varphi$, определяется из интеграла (8) и равна

$$\dot\varphi=\omega-\dot\psi\cos\theta. \tag{31}$$

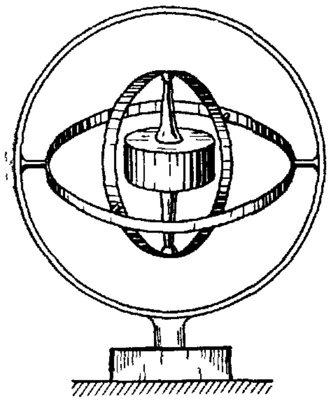


Рис. 78.

Поскольку, как видно из формул (27) или (28), $\dot\psi\ll\omega$, то практически можно считать $\dot\varphi\approx\omega$, т. е. что собственное вращение гироскопа происходит с постоянной угловой скоростью.

3. Элементарная теория гироскопа. Гироскопом (или волчком) обычно называют быстро вращающееся вокруг оси симметрии *однородное тело вращения*, ось которого может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп большей частью выполняется в виде массивного цилиндра или тора, закрепленного так, что одна из точек его оси остается все время неподвижной. Такое закрепление осуществляется, например, с помощью так называемого карданова подвеса (рис. 78).

У гироскопа обнаруживается целый ряд на первый взгляд парадоксальных явлений, обусловленных его быстрым вращением. Эти явления называют *гироскопическими*. Они возникают всюду, где имеются быстро вращающиеся тела, ось вращения которых может изменять свое направление, и потому имеют большое техническое значение.

Выше мы видели (см. пп. 1 и 2), что точное исследование движения гироскопа под действием даже одной только силы тяжести является довольно сложной задачей и что решение этой задачи можно упростить, когда угловая скорость собственного вращения гироскопа достаточно велика.

Дальнейшее упрощение проблемы дается в элементарной теории гироскопа, основанной на непосредственном применении к изучению его движения теоремы об изменении кинетического момента.

Рассмотрим гироскоп, закрепленный так, что его центр тяжести совпадает с неподвижной точкой O оси гироскопа (рис. 79). Назовем такой гироскоп уравновешенным. Пусть этот гироскоп вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Так как угловая скорость направлена в данном случае по главной центральной оси инерции, то кинетический момент $\boldsymbol{G}$ гироскопа относительно точки O будет направлен по той же оси, и при этом $\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}_1$, где J — момент инерции гироскопа относительно его оси. Если никакие внешние силы (кроме силы тяжести) на гироскоп не действуют, то главный момент всех внешних сил относительно центра O равен нулю и по теореме об изменении кинетического момента $\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=0$, откуда $\boldsymbol{G}=\text{const}$. Так как вектор $\boldsymbol{G}$ при этом все время направлен вдоль оси симметрии гироскопа, то, следовательно, ось в данном случае будет сохранять свое начальное направление относительно инерциальной системы отсчета, а угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_1$ будет постоянной.

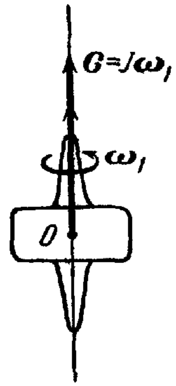


Рис. 79.

Допустим теперь, что на гироскоп действуют какие-нибудь внешние силы; тогда, как известно, гироскоп, кроме собственного вращения, будет совершать еще прецессионное и нутационное движения.

Исследования, проведенные в п. 2 для случая движения гироскопа под действием силы тяжести, показывают, что у быстро вращающегося гироскопа направление оси вследствие нутационных колебаний изменяется в очень малых пределах $\theta_1-\theta_0$ и угловая скорость нутации $\dot{\theta}$ при этом также очень мала [см. формулу (25)]. По этой причине нутационным движением оси в элементарной теории гироскопа вообще пренебрегают.

Угловая скорость прецессии, которую мы здесь будем обозначать $\boldsymbol{\omega}_2$, также мала, но при ее наличии ось гироскопа со временем

значительно изменяет свое направление; поэтому угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_2$ в элементарной теории гироскопа учитывается. Тогда мгновенная угловая скорость гироскопа будет $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$ (рис. 80). Но так как у быстро вращающегося гироскопа численно $\omega_2\ll\omega_1$, то приближенно можно считать, что $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1$, т. е. полагать, что и при наличии прецессии угловая скорость гироскопа в каждый момент времени равна угловой скорости его собственного вращения и направлена вдоль оси симметрии гироскопа. При этом допущении вектор кинетического момента будет также в любой момент времени равен $J\omega_1$ и направлен по оси гироскопа, т. е. будет $\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}_1$.

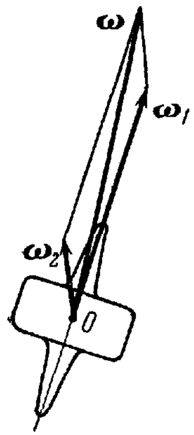


Рис. 80.

Напомним, что вообще когда тело, имеющее неподвижную точку, не вращается вокруг своей главной оси инерции, то эта ось, вектор $\boldsymbol{\omega}$ и вектор $\boldsymbol{G}$ имеют разные направления (см. § 15, п. 4).

Основное допущение элементарной теории гироскопа состоит в том, что у быстро вращающегося гироскопа эти три направления приближенно считаются совпадающими, т. е. принимается, что в любой момент времени вектор мгновенной угловой скорости и вектор кинетического момента $\boldsymbol{G}$ направлены по оси гироскопа и при этом

$$\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}_1. \qquad (32)$$

Сделанное допущение позволяет судить о перемещении оси гироскопа по изменению направления вектора $\boldsymbol{G}$, используя для этого теорему об изменении кинетического момента в истолковании Резаля. Согласно этой теореме

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\boldsymbol{M}, \qquad (33)$$

где $\boldsymbol{M}$ есть главный момент относительно неподвижной точки O всех действующих на гироскоп внешних сил. Если конец вектора $\boldsymbol{G}$ обозначить буквой B (рис. 81), то величину, стоящую в левой части равенства (33), можно (считая масштабный коэффициент равным единице) рассматривать как скорость $\boldsymbol{v}_B$ точки B, и тогда это равенство примет вид

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{M}. \qquad (34)$$

Таким образом, скорость конца вектора кинетического момента равна численно и по направлению главному моменту внешних сил (теорема Резаля). В элементарной теории вектор $\boldsymbol{G}$ считается все время направленным по оси гироскопа. Следовательно, точка B всегда совпадает с точкой оси гироскопа, отстоящей от неподвижной точки O на расстоянии $OB=G$. Поэтому, объединяя теорему Резаля с основным допущением элементарной теории гироскопа, будем в дальнейшем равенство (34) истолковывать следующим образом: скорость точки B оси гироскопа, отстоящей от неподвижной точки O на расстоянии $OB = G = J\omega_1$, имеет в любой момент скорость, равную численно и по направлению главному моменту $\boldsymbol{M}$ внешних сил относительно центра O.

Рассмотрим теперь, что произойдет с уравновешенным гироскопом, если на его ось начнет действовать сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 81), момент которой относительно неподвижной точки O равен $\boldsymbol{M}$ (или пара с моментом $\boldsymbol{M}$, направленным перпендикулярно к оси гироскопа). Согласно равенству (34) точка B оси получит при этом скорость $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{M}$ и отклонится за малый промежуток времени Δt на угол $\Delta\psi$, двигаясь в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{F}$. Следовательно, *под действием силы* $\boldsymbol{F}$ *ось гироскопа начнет отклоняться не в сторону действия силы, а в ту сторону, куда направлен вектор момента* $\boldsymbol{M}$ *этой силы относительно неподвижной точки* O (т. е. перпендикулярно к силе). В этом проявляется одно из интересных свойств быстро вращающегося гироскопа.

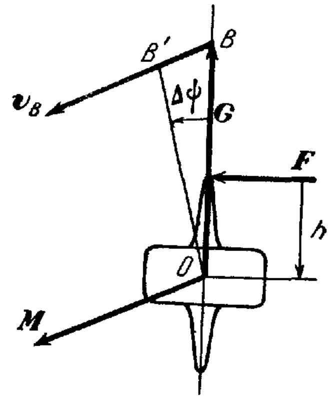


Рис. 81.

Пусть теперь в некоторый момент времени действие силы $\boldsymbol{F}$ прекращается. В обычных условиях точка (или тело) с прекращением действия силы продолжает двигаться по инерции. Для оси же гироскопа при $\boldsymbol{F} = 0$ мы получим $\boldsymbol{M} = 0$, а следовательно, и $\boldsymbol{v}_B = 0$, т. е. *с прекращением действия силы отклонение оси гироскопа прекращается*. В этом состоит второе интересное свойство гироскопа (безынерционность движения его оси).

Пользуясь этими результатами, рассмотрим сначала, какое действие на гироскоп оказывает мгновенная сила (или удар), т. е. большая по численной величине сила $\boldsymbol{F}$, действующая в течение столь малого промежутка времени τ, что ее импульс $F\tau$ есть величина конечная (см. гл. VII). Пусть на гироскоп подействовала мгновенная сила $\boldsymbol{F}$ (см. рис. 81), момент которой относительно неподвижной точки равен $\boldsymbol{M}$, причем численно $M = hF$. Тогда, согласно уравнению (34), $v_B = hF$ и точка B за время τ переместится на расстояние $BB' = hF\tau$; а так как $OB = G = J\omega_1$, то ось гироскопа за время τ повернется на угол $\Delta\psi$, определяемый равенством

$$\Delta\psi = \frac{\breve{BB'}}{OB} = \frac{hF\tau}{J\omega_1}. \qquad (35)$$

Поскольку произведение $hF\tau$, как было указано, — величина конечная, а собственный момент гироскопа $J\omega_1$ является величиной очень большой, то угол $\Delta\psi$ будет очень мал (тем меньше, чем больше $J\omega_1$).

По истечении же промежутка времени τ действие силы $\boldsymbol{F}$ прекращается, а следовательно, как было установлено, прекратится и отклонение оси.

В результате приходим к выводу, что действие мгновенной силы практически не изменяет направления оси бысто вращающегося уравновешенного гироскопа (примером может служить кубарь). Следовательно, быстро вращающийся гироскоп обладает устойчивостью по отношению к сохранению направления его оси. Это — одно из важных свойств гироскопа, широко используемое в технике.

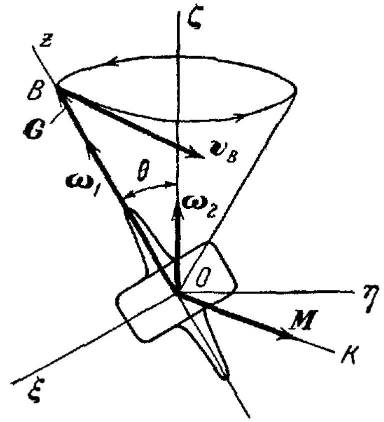


Рис. 82.

Перейдем теперь к рассмотрению движения гироскопа под действием сил. Пусть главный момент этих сил относительно неподвижной точки O изображается вектором $\boldsymbol{M}$, перпендикулярным к оси собственного вращения z гироскопа [1]). Тогда точка B оси z (рис. 82) будет двигаться со скоростью $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{M}$, а сама ось поворачиваться вокруг неподвижной точки O. Поскольку нутацией в элементарной теории пренебрегают, то движение оси около точки O представляет собой прецессию, т. е. вращение вокруг некоторой неподвижной оси ζ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. Очевидно, что скорость $\boldsymbol{v}_B$ связана с $\boldsymbol{\omega}_2$ соотношением $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{OB}$ или, поскольку $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{G} = J\boldsymbol{\omega}_1$, то $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times J\boldsymbol{\omega}_1$. В результате приходим к следующему основному равенству, связывающему величины $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{\omega}_2$:

$$J(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1) = \boldsymbol{M}. \qquad (36)$$

Собственный кинетический момент $J\boldsymbol{\omega}_1$ считается величиной заданной. Поэтому уравнение (36) позволяет, зная $\boldsymbol{M}(t)$, определить $\boldsymbol{\omega}_2$, т. е. прецессию, вызываемую этим моментом, и наоборот, зная $\boldsymbol{\omega}_2$, определить, каков момент $\boldsymbol{M}$, под действием которого эта прецессия происходит.

Рассмотрим сначала решение первой из названных задач. Из уравнения (36) видно, что вектор $\boldsymbol{M}$ в любой момент времени направлен перпендикулярно к плоскости $zO\zeta$, т. е. по линии узлов OK (см.

[1]) Если вектор $\boldsymbol{M}$ не перпендикулярен к оси z, то составляющая $\boldsymbol{M}$ вдоль этой оси вызовет ускорение или замедление собственного вращения, и тогда надо будет лишь в получаемых результатах считать ω_1 величиной переменной. На практике, однако, с помощью соответствующего моторчика всегда обеспечивают равномерное собственное вращение гироскопа.

рис. 57 на стр. 162). Следовательно, при выполнении условия $\boldsymbol{M} \perp Oz$ вектор $\boldsymbol{M}$ при движении гироскопа будет перемещаться по отношению к основной системе отсчета $\xi\eta\zeta$ в плоскости $\xi O\eta$. А так как вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ направлен по оси ζ, то отсюда следует, что вектор угловой скорости прецессии направлен перпендикулярно к неподвижной плоскости, в которой перемещается вектор $\boldsymbol{M}$; сторона, в которую направлен вектор $\boldsymbol{\omega}_2$, определяется равенством (36). Наконец, численное значение ω_2 также определяется из равенств (36), которое дает

$$\omega_2 = \frac{M}{J\omega_1 \sin\theta}, \tag{37}$$

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, т. е. угол нутации, причем $\theta = \text{const}$. Последнее следует из того, что в элементарной теории нутацией пренебрегают (или непосредственно из того, что $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{M}$, а так как вектор $\boldsymbol{M}$ перпендикулярен к плоскости $zO\zeta$, то точка B оси Oz в этой плоскости не перемещается).

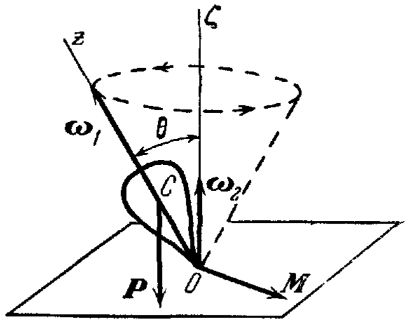


Рис. 83.

В качестве конкретного частного примера рассмотрим прецессию тяжелого гироскопа (волчка), поставленного под углом θ к вертикали. В этом случае на гироскоп действует сила тяжести $\boldsymbol{P}$ (рис. 83). Момент $\boldsymbol{M}$ этой силы относительно точки опоры O при любом направлении оси Oz гироскопа лежит в горизонтальной плоскости, проходящей через точку O; следовательно, ось прецессии $O\zeta$ вертикальна и при указанном направлении $\boldsymbol{\omega}_1$ вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ направлен вертикально вверх. Численно $M = Pa \sin\theta$, где $a = OC$ — расстояние центра тяжести от точки опоры. Подставляя это значение M в равенство (37), найдем, что гироскоп в этом случае прецессирует с угловой скоростью

$$\omega_2 = \frac{Pa}{J\omega_1}, \tag{38}$$

не зависящей от значения угла θ. Сравнивая этот результат с равенством (28) из п. 2, находим, что даваемая элементарной теорией величина угловой скорости прецессии, совпадает со средней величиной этой скорости, найденной путем интегрирования соответствующих приближенных уравнений движения.

Обратимся теперь ко второй из названных выше задач. Если угловая скорость прецессии $\boldsymbol{\omega}_2$ известна (и величина $J\boldsymbol{\omega}_1$ по условию также задана), то из равенства (36) сразу определяются численная величина и направление момента $\boldsymbol{M}$, под действием которого такая прецессия может происходить.

Если гироскоп совершает *вынужденную* прецессию, т. е. прецессирует потому, что устройство, с которым скреплена ось гироскопа, вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$, то момент $\boldsymbol{M}$ будет вызываться *силами давления на гироскоп подшипников, в которых* закреплена его ось. В свою очередь, по закону равенства действия и противодействия, ось гироскопа будет давить на подшипники с такими же по численной величине, но противоположно направленными силами. Эти силы образуют пару с моментом $\boldsymbol{M}^{\text{гир}}$, называемым гироскопическим моментом, которая будет действовать на устройство, сообщающее гироскопу вынужденную прецессию. Поскольку $\boldsymbol{M}^{\text{гир}} = -\boldsymbol{M}$, то из равенства (36) находим

$$\boldsymbol{M}^{\text{гир}} = J(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2) \tag{39}$$

и численно

$$M^{\text{гир}} = J\omega_1\omega_2 \sin\theta. \tag{40}$$

Из равенства (39) видно, что момент $\boldsymbol{M}^{\text{гир}}$ направлен так, что он стремится совместить кратчайшим путем вектор $\boldsymbol{\omega}_1$ с $\boldsymbol{\omega}_2$. Указанное явление носит название гироскопического эффекта и определяется следующим правилом Жуковского: *если какое-нибудь устройство сообщает быстро вращающемуся гироскопу вынужденную прецессию, то при этом на данное устройство со стороны гироскопа будет действовать пара с гироскопическим моментом* $\boldsymbol{M}^{\text{гир}}$, *стремящаяся кратчайшим путем установить ось собственного вращения гироскопа параллельно оси прецессии так, чтобы векторы угловых скоростей собственного вращения и прецессии при этом совпали по направлению.* Это правило объясняет значительное число гироскопических явлений.

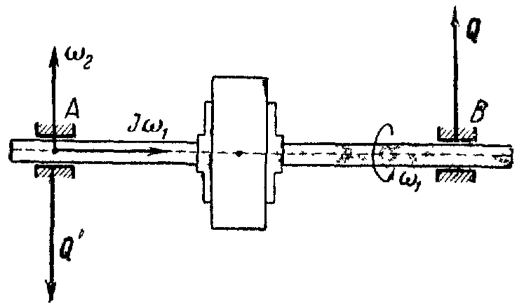


Рис. 84.

В технике гироскопический эффект часто имеет место в тех случаях, когда происходит поворот быстро вращающегося массивного тела, например пароходной турбины, ветряного двигателя и т. д. Допустим, что таким телом является пароходная турбина, вращающаяся на горизонтальном валу с угловой скоростью ω_1 (рис. 84). Если пароход будет делать разворот с угловой скоростью ω_2, то с ним повернется и вал турбины. Тогда вследствие гироскопического эффекта на подшипники A и B будет действовать пара сил $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}'$, направленная, согласно правилу Жуковского, так, как показано на рисунке, т. е. стремящаяся установить вал вертикально. Момент этой пары определяется формулой (40); поскольку в данном случае $\theta = 90°$, то $M^{\text{гир}} = J\omega_1\omega_2$. С другой стороны, момент пары $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}'$ равен $Q \cdot AB$. Отсюда находим силу добавочного давления на каждый подшипник, обусловленного гироскопическим эффектом:

$$Q = \frac{J\omega_1\omega_2}{AB}.$$

При больших значениях $J\omega_1$ эта сила достаточно велика и должна учитываться в соответствующих инженерных расчетах. Если же поворот будет сделан очень резко (с большой величиной ω_2), то сила Q может вызвать разрушение подшипника.

В настоящее время область технических приложений гироскопов громадна. Гироскопы используются в качестве стабилизаторов как прямого действия, в которых используются массивные гироскопы (например, гироскопические успокоители качки судов, гироскопические стабилизированные платформы и т. п.), так и не прямого действия, в которых гироскоп играет роль чувствительного элемента, передающего сигналы моторам, приводящим в движение соответствующие рули (например, прибор, стабилизирующий движение торпеды, всевозможные автопилоты и др.).

Большое применение находят различные гироскопические навигационные приборы: гироскопические компасы, гирогоризонты, указатели поворотов и т. д.

В технике используют также гироскопические тахометры, гироскопические интеграторы ускорений (прибор, позволяющий в любой момент времени определить скорость неравномерно движущегося объекта) и многие другие устройства, основанные на использовании рассмотренных выше свойств гироскопа.

§ 19. Случай С. В. Ковалевской

1. Интеграл Ковалевской. Новый интегрируемый случай движения тяжелого тела около неподвижной точки, полученный в 1889 г. С. В. Ковалевской, определяется двумя условиями: 1) $A = B = 2C$ и 2) центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, который, как показывает первое условие $A = B = 2C$, есть вытянутый эллипсоид вращения вокруг оси Oz.

Основные оси $O\xi\eta\zeta$, связанные с Землей[1]), выбираем, как и ранее, так, чтобы ось $O\zeta$ была направлена по вертикали. Оси подвижной системы $Oxyz$ направляем по главным осям инерции тела. Ось Oz по условию совпадает с осью динамической симметрии (в данном случае с большой осью эллипсоида инерции) Если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то любая ось в его экваториальной

[1]) См. сноску на стр. 176.

плоскости есть главная ось инерции; поэтому, не ограничивая общности рассуждения, можно ось Ox провести через центр тяжести C; тогда направление оси Oy определится само собой. Обозначим, как и раньше, радиус-вектор центра тяжести C относительно неподвижной точки O через $\overline{OC} = \boldsymbol{a}(a,\ 0,\ 0)$, а направляющие косинусы вертикали $O\zeta$ относительно подвижных осей — через γ_1, γ_2, γ_3. Момент силы тяжести $\boldsymbol{P}$ относительно точки O будет

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & 0 & 0 \\ -P\gamma_1 & -P\gamma_2 & -P\gamma_3 \end{vmatrix} = P \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Динамические уравнения Эйлера при наличии условия

$$A = B = 2C$$

и при найденном значении $\boldsymbol{M}_O$ примут вид

$$2C\frac{dp}{dt} - Cqr = 0,$$
$$2C\frac{dq}{dt} + Crp = Pa\gamma_3,$$
$$C\frac{dr}{dt} = -Pa\gamma_2$$

или, деля обе части каждого из уравнений системы на C и обозначая постоянную $\frac{Pa}{C} = n$,

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} - qr &= 0, \\ 2\frac{dq}{dt} + rp &= n\gamma_3, \\ \frac{dr}{dt} &= -n\gamma_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

К системе (1) необходимо еще присоединить уравнения (14) § 16:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) представляют систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с шестью неизвестными функциями времени p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3. Для данной системы, как и в двух рассмотренных выше случаях, можно легко получить три известных алгебраических интеграла, именно: интеграл энергии, интеграл площадей, получающийся проектированием кинетического момента на вертикаль $O\zeta$, и тривиальное соотношение между косинусами $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$. К этим трем интегралам С. В. Ковалевская добавила четвертый. Для получения его умножим второе из уравнений (1) на мнимую единицу $i=\sqrt{-1}$ и сложим с первым; таким же образом умножим на i второе из уравнений (2) и сложим с первым. Получим

$$2\frac{d}{dt}(p+iq)=-ir(p+iq)+in\gamma_3,$$
$$\frac{d}{dt}(\gamma_1+i\gamma_2)=-ir(\gamma_1+i\gamma_2)+i\gamma_3(p+iq).$$

Исключаем γ_3 из двух полученных уравнений, умножая первое из них на $p+iq$ и вычитая из него второе, умноженное на n; получим

$$2(p+iq)\frac{d}{dt}(p+iq)-\frac{d}{dt}n(\gamma_1+i\gamma_2)=ir\,[n(\gamma_1+i\gamma_2)-(p+iq)^2],$$

или

$$\frac{d}{dt}[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)]=-ir\,[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)],$$

что можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\ln[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)]=-ir. \tag{3}$$

Проделаем те же операции, но умножая не на i, а на отрицательную мнимую единицу $-i=-\sqrt{-1}$. Тогда после выкладок совершенно таких же, как и предшествующие, мы придем к выражению, очевидно, получающемуся из равенства (3), если произвести в нем замену i на $-i$, т. е.

$$\frac{d}{dt}\ln[(p-iq)^2-n(\gamma_1-i\gamma_2)]=ir. \tag{4}$$

Складывая равенства (3) и (4) почленно, получим

$$\frac{d}{dt}\ln\{[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)]\,[(p-iq)^2-n(\gamma_1-i\gamma_2)]\}=0. \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (5), найдем четвертый алгебраический интеграл:

$$[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)]\,[(p-iq)^2-n(\gamma_1-i\gamma_2)]=\text{const}. \tag{6}$$

Преобразуя выражение (6), будем иметь

$$[(p^2-q^2-n\gamma_1)+i(2pq-n\gamma_2)]\times$$
$$\times[(p^2-q^2-n\gamma_1)-i(2pq-n\gamma_2)]=\text{const},$$

или

$$(p^2-q^2-n\gamma_1)^2+(2pq-n\gamma_2)^2=\text{const}=k. \tag{7}$$

Это и есть интеграл Ковалевской. Окончательно задача сводится к квадратурам гиперэллиптического типа.

2. Заключительные замечания. В рассмотренных выше трех случаях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, т. е. в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, кроме трех первых интегралов (тривиального, интеграла энергии и интеграла площадей), существует еще четвертый алгебраический интеграл, благодаря которому задача приводится к квадратурам. Возникает вопрос о том, могут ли быть, кроме этих трех, другие случаи движения твердого тела около неподвижной точки, для которых также имеет место четвертый алгебраический интеграл. Исследования Хуссона (Husson) (1905 г.), Бургатти (Burgatti) (1910 г.) и др. показали, что для других случаев, кроме трех рассмотренных, не существует других алгебраических интегралов, кроме тривиального, интеграла энергии и интеграла площадей.

Это заключение относится к общим интегралам, имеющим место при любых начальных условиях. Тем не менее различными авторами найдены случаи, для которых существуют частные алгебраические интегралы, т. е. интегралы, имеющие место только при некоторых, специфически выбранных начальных условиях. К таким случаям относятся случаи Гесса (Hess), С. А. Чаплыгина, Бобылева — Стеклова, Д. Н. Горячева и других авторов (см. Г. К. Суслов, Теоретическая механика, 1946, гл. LI).

§ 20. Движение свободного твердого тела

1. Уравнения движения свободного тела. Если обозначить через $O\xi\eta\zeta$ основную систему отсчета, то уравнения движения центра масс свободного твердого тела получатся из теоремы о движении центра масс в виде

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\xi}_C&=R_\xi,\\ m\ddot{\eta}_C&=R_\eta,\\ m\ddot{\zeta}_C&=R_\zeta,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где m — масса тела, ξ_C, η_C, ζ_C — координаты его центра масс C относительно осей основной системы, а R_ξ, R_η, R_ζ — проекции на те же оси главного вектора внешних сил.

Если провести через центр массы C оси ξ', η', ζ', соответственно параллельные осям основной системы, и обозначить через $Cxyz$ подвижные оси, связанные с телом и направленные по главным осям инерции тела в точке C, то движение твердого тела около центра масс, как около неподвижной точки, определится движением осей $Cxyz$ относительно системы $C\xi'\eta'\zeta'$, которое будет известно, если известны соответствующие углы Эйлера в функции времени.

Так как теорема моментов применима и к относительному движению около центра масс, то для движения твердого тела относительно центра масс будем иметь те же самые динамические уравнения Эйлера, что и для тела с неподвижной точкой, т. е.

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr&=M_x,\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp&=M_y,\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq&=M_z. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Система уравнений (1) и (2) представляет собой систему шести дифференциальных уравнений движения для свободного твердого тела. Так как неизвестными являются три абсолютные координаты центра масс ξ_C, η_C, ζ_C и три угла Эйлера φ, ψ, θ, то к системе (1), (2) необходимо еще присоединить кинематические уравнения Эйлера [уравнения (7) § 16].

Обычно в простых случаях движения, например в случае движения твердого тела в безвоздушном пространстве, проекции главного вектора внешних сил R_ξ, R_η, R_ζ не зависят от углов Эйлера, а проекции главного момента M_x, M_y, M_z не зависят от координат центра масс. В таком случае уравнения (1) и (2) можно интегрировать независимо друг от друга; ξ_C, η_C, ζ_C выразятся в функции времени и шести произвольных постоянных, а φ, ψ, θ — в функции t и шести других (независимых от первых) произвольных постоянных. Однако в некоторых более сложных случаях, например в случае движения тела в сопротивляющейся среде, главный момент $\boldsymbol{M}$ внешних сил относительно центра масс будет зависеть от координат ξ_C, η_C, ζ_C, а действующая на тело сила сопротивления будет зависеть от ориентировки тела, т. е. углов φ, ψ, θ и уравнения (1) и (2) образуют совместную систему. В этом общем случае интегрирования интегралы системы (1), (2) будут содержать 12 произвольных постоянных интегрирования.

2. Примеры. 1) Допустим, что свободное твердое тело движется вне поля сил ($\boldsymbol{R}=0$, $\boldsymbol{M}_C=0$). Тогда, как видно из уравнений (1) и (2), его центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно, а движение тела около центра масс будет таким же, как в случае Эйлера — Пуансо. Это движение можно назвать движением твердого тела по инерции в общем случае.

2) Допустим, что твердое тело движется в однородном поле тяжести при отсутствии сил сопротивления. Тогда на тело действует только сила тяжести, равная mg, приложенная в центре масс и направленная по вертикали вниз. Если ось ζ направить вертикально вверх, то уравнения (1) примут вид

$$\ddot{\xi}_C=0, \quad \ddot{\eta}_C=0, \quad \ddot{\zeta}_C=-g.$$

Отсюда (см. ч. I, § 36) найдем, что при произвольных начальных условиях центр масс тела будет двигаться по параболе. Движение около центра масс, поскольку и здесь $M_C=0$, будет таким, как в случае Эйлера — Пуансо.

3) Рассмотрим движение планеты в поле тяготения Солнца, пренебрегая притяжениями других небесных тел. Если планету считать состоящей из однородных сферических слоев, то, как доказывается в теории потенциала, планета будет притягиваться к Солнцу как материальная точка, масса которой равна массе m планеты и сосредоточена в центре масс (силы притяжения имеют при этом равнодействующую, проходящую через центр масс). Тогда уравнения (1) можно преобразовать так же, как в случае движения материальной точки под действием центральной силы (см. ч. I, § 37); в результате найдем, что траекторией центра масс будет коническое сечение, в частности, при соответствующих начальных условиях, эллипс с фокусом в притягивающем центре.

Момент $\boldsymbol{M}_C$ равнодействующей сил тяготения относительно центра масс здесь опять равен нулю. Но, поскольку при сделанном допущении о форме планеты центральный эллипсоид инерции является сферой, то движение планеты около центра масс будет равномерным вращением вокруг оси, сохраняющей неизменное направление в пространстве (направление этой оси и величина угловой скорости вращения определяются начальными условиями).

Если же не считать планету состоящей из однородных сферических слоев и учесть ее реальную форму, например для Земли форму геоида, то окажется, что равнодействующая сил притяжения уже не будет проходить через центр масс планеты и будет $\boldsymbol{M}_C \neq 0$. Тогда движение планеты около центра масс будет аналогично движению гироскопа, т. е. помимо собственного вращения планета будет совершать еще прецессию вокруг оси, перпендикулярной к плоскости эклиптики, а также нутационные колебания. В частности, прецессию под действием сил притяжения Солнца и Луны совершает и земная ось; период этой прецессии равен приблизительно 26 000 лет.

ГЛАВА ПЯТАЯ

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 21. Вывод уравнений и первые интегралы

1. Канонические переменные. Лагранжева система уравнений представляет собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q и в случае, когда действующие силы потенциальны, имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

где

$$L=L(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_n;\ t)$$

есть функция Лагранжа (или кинетический потенциал), зависящая от координат q, скоростей $\dot{q}$ и, в общем случае от времени t. Координаты, от которых функция L явно не зависит и которые входят в L только своими производными, носят название циклических. Если L есть функция второй степени от скоростей, то система (1) называется динамической; в этом случае (см. § 8, п. 4)

$$L=L_2+L_1+L_0.$$

Систему (1) можно легко привести к системе $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, считая скорости $\dot{q}$ за неизвестные функции. Такая система будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0;\ \dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt} \qquad (i=1,\ 2.\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Система (2) определяет неизвестные функции $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_n$, которые называются *лагранжевыми переменными*, и, как видно, является системой $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Для приведения системы (1) к каноническому виду вместо лагранжевых переменных q_i и $\dot{q}_i$ (координат и скоростей) введем новые переменные, а именно обобщенные координаты q_i и обобщенные импульсы p_i, где

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Эти переменные будем называть *каноническими переменными*.

Такое преобразование (принадлежащее Пуассону и Гамильтону) будет возможно, если система n уравнений (3) может быть разрешена относительно $\dot{q}_i$, а это в свою очередь возможно тогда, когда функциональный определитель (якобиан) системы тождественно не равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2},\ \ldots,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)}{\partial(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_n)}\equiv\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_j}\right\|\neq 0.$$

Лагранжева система, для которой определитель Гесса $\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_j}\right\|$ не равен нулю, называется *нормальной системой*. Если система динамическая, то

$$L=L_2+L_1+L_0,$$

причем

$$L_2=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad L_1=\sum_{i=1}^{n} a_i\dot{q}_i;$$

поэтому для динамической системы обобщенные импульсы равны

$$p_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j+a_i, \tag{3'}$$

т. е. являются линейными функциями скоростей, и определитель Гесса будет

$$\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_j}\right\|=\|a_{ij}\|,$$

т. е. равен дискриминанту квадратичной формы L_2, который не может быть тождественно равен нулю. В самом деле, функция $L_2=T_2$ всегда положительна и обращается в нуль только в том случае, если все $\dot{q}_i$ равны нулю, а если бы дискриминант $\|a_{ij}\|$ этой положительной квадратичной формы был тождественно равен нулю, то система однородных линейных уравнений

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

удовлетворялась бы при значениях $\dot{q}$, отличных от нуля, и следовательно, согласно теореме Эйлера, было бы

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2L_2 = 0,$$

т. е. функция L_2 обращалась бы в нуль при значениях $\dot{q}$, отличных от нуля, что невозможно. Итак, динамическая система будет всегда нормальной, и преобразование Пуассона — Гамильтона для нее всегда возможно.

Разрешая систему уравнений (3) относительно $\dot{q}$, получим

$$\dot{q}_i = f(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Подставляя выражения (4) в функцию L, мы получим

$$L(q, \dot{q}; t) \to \overline{L}(q, p; t),$$

т. е. функция L выразится в канонических переменных. Тогда, подставляя выражения (3) и (4) в лагранжеву систему (1), будем иметь

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) образуют систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = f(q, p; t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4'}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \overline{L}(q, p; t)}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5'}$$

которые и будут уравнениями движения в канонической форме.

2. Уравнения Гамильтона. Гамильтон в 1834 г. дал иной вид каноническим уравнениям движения, выразив правые части уравнений (4′) и (5′) через одну функцию, которая носит название функции Гамильтона. Для вывода этих уравнений возьмем вариацию функции $L(q, \dot{q}; t)$, выраженной в лагранжевых переменных; получим

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i. \tag{6}$$

Преобразуем второй член правой части уравнения (6); имеем

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \delta\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right). \tag{7}$$

Внося выражение (7) в уравнение (6) и изменяя группировку членов, получим

$$\delta\left(-L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) = -\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right). \tag{8}$$

В левой части уравнения (8) под знаком δ стоит функция, которая встречалась уже в § 8, п. 5 и была обозначена через H^*. Введем в уравнение (8) вместо лагранжевых переменных канонические, заменив $\dot{q}$ их выражениями (4). Тогда функция

$$-L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = H^*(q, \dot{q}; t)$$

после этого преобразования перейдет в функцию

$$H(q, p; t) = \left(-L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right)_{\dot{q} \to p}. \tag{9}$$

Функция $H(q, p; t)$, взаимная по отношению к функции L, но выраженная в канонических переменных, называется функцией Гамильтона. Поскольку $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, функцию H можно еще представить в виде

$$H(q, p, t) = \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right)_{\dot{q} \to p}. \tag{10}$$

Отсюда сразу определяются выражения $\dot{q}_i$ через функцию H, аналогичные выражениям (3) импульсов p_i через функцию L. Действительно, вычисляя из выражения (10) производную от H по p_i и учитывая, что в этом выражении H зависит от p_i как явно, так и через переменные $\dot{q}_i$, получим

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}.$$

Входящие в правую часть суммы сокращаются, поскольку $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j$, и окончательно будем иметь

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{11}$$

Найдем теперь вторую группу уравнений, которые собственно и являются уравнениями движения. Для этого перейдем в правой части равенства (8) к каноническим переменным. Тогда функция $L(q, \dot{q}; t)$

перейдет в $\overline{L}(q, p; t)$, а $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ заменится через p_i, и уравнение (8) примет вид

$$\delta H(q, p; t) = -\sum_i \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i,$$

или, принимая во внимание равенство (5),

$$\delta H(q, p; t) = -\sum_i \dot{p}_i \delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i. \qquad (12)$$

Развертывая в левой части вариацию H, получим

$$\sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i = -\sum_i \dot{p}_i \delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i.$$

Отсюда, учитывая равенства (11), находим

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i\right)\delta q_i = 0.$$

Это соотношение, поскольку все δq_i между собою независимы, дает

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Присоединяя сюда равенства (11), приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (13)$$

Уравнения (13) носят название канонической системы уравнений движения в форме Гамильтона или просто *уравнений Гамильтона*. Они представляют собой систему обыкновенных уравнений первого порядка, определяющих $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ как функций времени, т. е. $q, p \mid t$.

В случае динамической системы уравнения (1) применимы только тогда, когда система консервативна, т. е. когда силы, действующие на систему, имеют потенциал, ибо $L = T + U$; следовательно, и уравнения (13) тоже имеют место только для этого случая. Но весьма легко получить уравнения Гамильтона и для неконсервативной динамической системы.

Предположим для общности, что на динамическую систему действуют силы как консервативные, имеющие потенциал U, так и неконсервативные; тогда уравнения движения такой системы будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $L = T + U$, причем $L \mid q, \dot{q}, t$. Полагая по-прежнему

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

и вводя канонические переменные, получим уравнения (4′) и (5′) в виде

$$\frac{dq_i}{dt} = f(q, p; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d\overline{L}}{dq_i} + \overline{Q}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а равенство (12) в виде

$$\delta H = -\sum_i (\dot{p}_i - \overline{Q}_i)\delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i,$$

откуда тем же путем, что и при выводе уравнений (13), получим

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \overline{Q}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (14)$$

Уравнения (14) представляют собой уравнения Гамильтона для неконсервативной системы.

Необходимо заметить, что уравнения Гамильтона, как полученные из уравнений Лагранжа второго рода, применимы только к голономным системам.

3. Функция Гамильтона. Функция Гамильтона, как было уже сказано в предыдущем пункте, есть функция, взаимная по отношению к функции L и выраженная в канонических переменных, т. е.

$$H(q, p; t) \equiv \left(-L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)_{\dot{q} \to p}.$$

Координаты q, не входящие явно в функцию H, называются циклическими. В случае динамической системы имеем

$$L = L_2 + L_1 + L_0;$$

поэтому по теореме Эйлера

$$-L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = -L_2 - L_1 - L_0 + 2L_2 + L_1 = L_2 - L_0,$$

а следовательно,

$$H(q, p; t) = \overline{L}_2 - L_0, \qquad (15)$$

где $\overline{L}_2$ есть функция L_2, в которой скорости $\dot{q}$ выражены через импульсы p. Так как в случае динамической системы скорости $\dot{q}$, согласно формуле (3′), суть линейные функции импульсов p, то из равенства (15) следует, что H есть функция второй степени от импульсов p.

Если

$$L = T + U = T_2 + T_1 + T_0 + U,$$

то

$$L_2 = T_2; \quad L_0 = T_0 + U$$

и, следовательно,

$$H(q, p; t) = \overline{T}_2 - T_0 - U. \tag{15′}$$

Если, как это бывает в большинстве конкретных случаев, кинетическая энергия T есть однородная функция второй степени от скоростей (а следовательно, и от импульсов), т. е. если

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i, j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \qquad T_0 = 0,$$

то

$$H = \overline{T}_2 - U = \overline{E}, \tag{16}$$

т. е. функция H есть сумма кинетической и потенциальной энергии или полная энергия системы, в которой скорости $\dot{q}$ выражены через импульсы p.

Пример. Составим уравнения Гамильтона для свободной материальной точки с массой m, движущейся в потенциальном поле сил. В этом случае положение точки определяется тремя независимыми координатами x, y, z. Кинетическая энергия точки будет

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

а потенциальная равна $-U(x, y, z)$, где U есть потенциал силового поля. Полная энергия равна

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

Чтобы получить функцию H, нужно в выражении E вместо скоростей ввести импульсы. Имеем, согласно (3),

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

$$p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},$$

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z};$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{m}, \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{m}, \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Подставляя выражения (a) в E, получим

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - U(x, y, z).$$

Уравнения Гамильтона (13) будут иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \text{ и т. д. и } \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ и т. д.,}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}, \qquad \frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{m}, \qquad \frac{dp_y}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m}, \qquad \frac{dp_z}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Подставляя выражения p_x, p_y, p_z из первых трех уравнений в остальные, получим уравнения Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

4. Первые интегралы. Первым интегралом канонической системы уравнений (13), т. е. уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

называется функция $f(q, p; t)$, которая остается постоянной при всех значениях q и p, удовлетворяющих уравнениям (13); иначе говоря, если $f(q, p; t)$ есть первый интеграл системы (13), то

$$f(q, p; t) = \text{const}$$

во все время движения при любых начальных условиях. Ясно, что если $f = \text{const}$ есть первый интеграл, то любая функция $F(f) = \text{const}$ будет тоже первым интегралом.

Задача интегрирования системы (13) заключается в определении переменных p и q в функции времени и $2n$ произвольных постоянных, т. е. в определении

$$p, q \mid t; \quad c_1, c_2, \ldots, c_{2n}.$$

Если для системы (13) найдены $2n$ независимых между собою первых интегралов

$$f_1 = c_1, \ f_2 = c_2, \ \ldots, \ f_{2n} = c_{2n}, \tag{17}$$

т. е. таких, что ни одна из этих функций f не может быть выражена как функция остальных, то система (13) проинтегрирована, так как из $2n$ уравнений (17) можно найти p и q как функции t и $2n$ произвольных постоянных. Это возможно, так как определитель Якоби

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \ldots, f_{2n})}{\partial (q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n)} \neq 0$$

вследствие независимости между собой функций f.

В некоторых частных случаях система (13) непосредственно дает первые интегралы, а именно:

1) Если функция H явно не зависит от времени, т. е. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Для доказательства возьмем производную от функции H по времени; получим

$$\frac{dH(q, p; t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right).$$

Подставляя во второй член правой части выражения $\dot{q}_i$ и $\dot{p}_i$ через функцию H из уравнений (13), мы видим, что этот член равен нулю, следовательно,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{18}$$

Поэтому если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то и $\frac{dH}{dt} = 0$, а следовательно,

$$H(q, p) = h, \tag{19}$$

где h есть постоянная, т. е. имеем первый интеграл. Принимая во внимание выражение (9) для H, мы видим, что интеграл (19) есть обобщенный интеграл энергии. Для динамической системы этот интеграл обобщается на основании равенства (15′) в интеграл Якоби

$$\overline{T}_2 - T_0 - U = h,$$

а в случае, если $T = T_2$, в интеграл энергии в физическом смысле

$$\overline{T} - U = h;$$

постоянная h в этом случае есть постоянная энергии (ср. § 8, п. 5).

2) Если некоторые из координат явно не входят в функцию H, т. е. будут циклическими. Пусть циклическими будут первые k координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k < n)$; тогда

$$H = H(q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t).$$

В этом случае

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

и уравнения Гамильтона (13) дают k первых интегралов

$$p_1 = \alpha_1, \quad p_2 = \alpha_2, \ \ldots, \quad p_k = \alpha_k, \tag{20}$$

где α_i суть постоянные. Эти интегралы носят название циклических и выражают собой тот факт, что циклические импульсы постоянны. Поэтому очень важно найти такое преобразование канонических переменных q и p, при котором уравнения (13) сохранили бы свою гамильтонову форму и возможно большее число координат стало бы циклическим. Такие преобразования канонических переменных, при которых уравнения (13) переходят в уравнения того же вида, называются *каноническими*; о них будет сказано ниже (см. § 27).

Предположим, что координаты все циклические, т. е. что функция H зависит только от одних импульсов и времени, т. е.

$$H = H(p_1, p_2, \ldots, p_n; t);$$

тогда из уравнений (13) имеем

$$p_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где α_i суть постоянные.

Если предположить еще, что $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, т. е. что функция H не зависит явно от времени, то тогда функция $H = H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{const}$, и первая группа уравнений (13) приводит к остальным n интегралам. В самом деле, в этом случае

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)_{p \to \alpha} = \gamma_i, \quad q_i = \gamma_i t + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. координаты q суть линейные функции времени.

Таким образом, если все координаты циклические, то каноническая система уравнений движения легко интегрируется. Возникает вопрос о возможности отыскать такие преобразования переменных q и p в переменные $\overline{q}$ и $\overline{p}$, при которых система уравнений движения осталась бы по-прежнему канонической, но все координаты q были бы уже циклические. Такие преобразования несомненно существуют, хотя и не найдены до сих пор.

Пример. Составим уравнения движения материальной точки с массой m под действием центральной силы. Поскольку движение является плоским, выберем в качестве независимых координат полярные координаты точки r и φ, беря начало отсчета r в центре силы. Тогда кинетическая энергия точки будет

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

а потенциальная равна $-U(r)$. Введем в выражение T вместо скоростей импульсы

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Получаем

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

и

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right).$$

Следовательно, функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - U(r).$$

Координата φ оказалась циклической; следовательно, имеем первый интеграл

$$p_\varphi = \alpha; \tag{а}$$

это интеграл площадей.

Кроме того, поскольку H не зависит явно от t, имеет еще место интеграл энергии

$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - U(r) = h \tag{б}$$

или

$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right) - U(r) = h. \tag{б$'$}$$

Следовательно, здесь $p_\varphi = \text{const}$, а p_r есть функция только r. Поскольку найдено два первых интеграла, решение задачи сводится к интегрированию только двух дифференциальных уравнений первого порядка (вместо четырех), например

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi},$$

т. е., учитывая, что $p_\varphi = \alpha$,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\alpha}{mr^2}. \tag{в}$$

Из первого уравнения, поскольку зависимость $p_r(r)$ дается равенством (б$'$), найдем $r(t)$; после этого из второго уравнения определяется зависимость $\varphi(t)$.

Если уравнения (в) поделить почленно и заменить одновременно p_r его выражением $p_r(r)$ из равенства (б$'$), то получим дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2 p_r(r)}{\alpha}.$$

§ 22. Метод Якоби

1. Некоторые сведения из теории уравнений в частных производных первого порядка. Общий вид уравнения в частных производных первого порядка есть

$$F(x_1, \ldots, x_n;\ z;\ p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

где $p_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$. Функция

$$z = z(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n),$$

удовлетворяющая уравнению (1) и зависящая от стольких неаддитивных произвольных постоянных, сколько уравнение содержит независимых переменных, называется полным интегралом уравнения (1).

Если функция F не содержит явно z, т. е. уравнение в частных производных имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{2}$$

то одна из произвольных постоянных будет аддитивной, т. е. будет входить в общий интеграл в качестве слагаемого; следовательно, полный интеграл уравнений (2) будет иметь вид

$$z = z(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_n.$$

Если уравнение в частных производных будет вида

$$F(x_{k+1}, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_n) = 0, \tag{3}$$

т. е. часть независимых переменных, в данном случае первые k из них: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k \leqslant n)$, будут входить в функцию F не явно, а только посредством частных производных $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то число независимых переменных уравнения (3) можно сделать равным $(n-k)$, т. е. понизить на k единиц. В самом деле, полагая

$$z = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k + \zeta(x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

дифференцированием находим

$$p_1 = a_1, \ \ldots, \ p_k = a_k, \ p_{k+1} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_{k+1}}, \ \ldots, \ p_n = \frac{\partial \zeta}{\partial x_n},$$

и, следовательно, уравнение (3) примет вид

$$f\left(x_{k+1}, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_k;\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_{k+1}}, \ \ldots, \ \frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, уравнение (4) имеет $n-k$ независимых переменных. Полный интеграл этого уравнения напишется в виде

$$\zeta = \zeta(x_{k+1}, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_k;\ a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}) + a_n$$

и, следовательно,

$$z = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k + \\ + \zeta(x_{k+1}, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_k;\ a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}) + a_n.$$

Наконец, напомним, что уравнения характеристик для уравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_n) = 0$$

представляется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = -\frac{dp_1}{X_1} = \ldots = -\frac{dp_n}{X_n}, \tag{5}$$

где

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

2. Уравнение Якоби. Каноническую систему уравнений движения [(13) § 21]

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{6}$$

можно представить в виде

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}} = \frac{dt}{1}. \tag{6'}$$

Сравнивая эту систему уравнений с уравнениями характеристик (5), легко убедиться, что каноническую систему уравнений можно рассматривать как уравнения характеристик следующего уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n;\ \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ \ldots,\ \frac{\partial S}{\partial q_n};\ t\right) = 0, \tag{7}$$

где неизвестная функция обозначена через S. Это уравнение называется *уравнением Якоби*. Во многих случаях оказывается проще найти полный интеграл этого уравнения, а затем, опираясь на теорему Якоби, и самые интегралы канонической системы (6), чем непосредственно интегрировать эту систему уравнений. Вообще же интегрирование уравнения Якоби не представляет упрощения задачи, так как эта задача, как известно, сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5), которые для уравнения Якоби (7) представляют собой ту же систему (6).

Неизвестная функция S называется *главной функцией Гамильтона*; с ней мы встретимся еще в главе о вариационных принципах. Очевидно, $q_1, q_2, \ldots, q_n;\ t$ будут независимыми переменными для функции S и, следовательно, полный интеграл уравнения (7) будет

содержать $n+1$ произвольных постоянных, из которых одна, поскольку функция S явно не входит в уравнение Якоби, будет аддитивной. Следовательно, полный интеграл уравнения Якоби будет иметь вид

$$S = \tilde{S}(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ a_1, \ldots, a_n) + a_{n+1}. \tag{8}$$

3. Теорема Якоби. Предположим, что полный интеграл (8) уравнения Якоби найден. Возьмем уравнения

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial a_i} = b_i, \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_i} = p_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{9}$$

где b_i суть произвольные постоянные. Теорема Якоби состоит в том, что если известен полный интеграл уравнения Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q};\ t\right) = 0, \tag{7}$$

т. е. найдена функция

$$\tilde{S}(q_1,\ q_2, \ldots, q_n;\ t;\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n) + a_{n+1},$$

тождественно удовлетворяющая уравнению (7), то уравнения (9) будут интегралами канонической системы уравнений (6). Таким образом, согласно теореме Якоби, переменные q_i, p_i, определенные из уравнений (9) в функции времени t, и $2n$ произвольных постоянных $a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n$ будут тождественно удовлетворять каноническим уравнениям движения (6). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой найденных из уравнений (9) значений переменных q, p в канонические уравнения движения (6); проще, однако, сделать обратное, т. е. показать, что функции q, p, определенные из канонических уравнений движения, тождественно удовлетворяют уравнениям (9).

Дифференцируя первые n уравнений (9) по времени t, получим n уравнений вида

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_i\, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_i\, \partial q_j} \dot{q}_j = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Заменяя в левой части полученных равенств $\dot{q}_j$ их выражениями из канонических уравнений, т. е. через $\frac{\partial H}{\partial p_j}$, получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_i\, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_i\, \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0.$$

Докажем, что полученное уравнение есть тождество, если переменные, входящие в функцию H, заменить их значениями из уравнений (9).

Выполняя эту замену, получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_i\,\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial q_j}\right)}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_i\,\partial q_j}=0. \qquad (10)$$

Но левая часть этого равенства есть частная производная по a_i от левой части уравнения Якоби (7), в котором функция S заменена через полный интеграл $\tilde{S}$, т. е. равна

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left[\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}+H\left(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_n}\right)\right],$$

а потому тождественно равна нулю; следовательно, равенство (10) есть тождество, что и требовалось доказать.

Аналогичные рассуждения применим для доказательства того же положения относительно второй группы уравнений (9). Дифференцируя по t уравнения второй группы (9), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_i\,\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_i\,\partial q_j}\dot{q}_j-\dot{p}_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Заменяя $\dot{q}$ и $\dot{p}$ их выражениями из канонических уравнений, получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_i\,\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_i\,\partial q_j}+\frac{\partial H}{\partial q_i}=0.$$

Покажем, что полученное равенство обращается в тождество, если переменные, входящие в функцию H, заменить их значениями из уравнений (9). Выполняя эту замену, получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_i\,\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial q_i}\right)}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_i\,\partial q_j}=0. \qquad (11)$$

Левая часть равенства (11) есть частная производная по q_i от левой части уравнения Якоби (7), в котором функция S заменена через полный интеграл $\tilde{S}$, т. е. эта левая часть равна

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}+H\left(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_n}\right)\right],$$

а потому тождественно равна нулю; следовательно, равенство (11) есть тождество.

Таким образом, если полный интеграл (8) уравнения Якоби известен, то по теореме Якоби канонические переменные q_i, p_i

определяются как функции времени t и $2n$ произвольных постоянных $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ из уравнений (9), представляющих собой по отношению к q_i и p_i систему алгебраических уравнений.

4. Случай, когда H явно от времени не зависят. Этот случай встречается в большинстве практических вопросов. Пусть

$$H=H(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ p_1,\ \ldots,\ p_n).$$

Уравнение Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=0. \qquad (12)$$

Поскольку t в уравнение явно не входит, то число независимых переменных можно уменьшить на единицу. Для этого, согласно п. 1, положим

$$S=-ht+W(q_1,\ \ldots,\ q_n),$$

где h *есть постоянная*. Функция W, с которой мы еще встретимся в главе о вариационных принципах, называется характеристической функцией.

Так как

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-h \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial q_i}=\frac{\partial W}{\partial q_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то, подставляя в уравнение Якоби вместо S и ее производных эти значения, получаем для определения функции W уравнение

$$H\left(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=h, \qquad (13)$$

не содержащее переменной t. Предположим, что полный интеграл *уравнения* (13), *имеющий вид*

$$W=W(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1};\ h)+a_n,$$

найден. Тогда полный интеграл уравнения (12) будет

$$S=-ht+W(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1};\ h)+a_n.$$

Отсюда легко получить систему (9) интегралов канонических уравнений; принимая во внимание, что $\dfrac{\partial S}{\partial a_i}=\dfrac{\partial W}{\partial a_i}$, $\dfrac{\partial S}{\partial q_i}=\dfrac{\partial W}{\partial q_i}$, будем иметь

$$\frac{\partial W}{\partial a_i}=b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \qquad (14)$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=p_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (15)$$

$$=\frac{\partial S}{\partial h}-t+\frac{\partial W}{\partial h}=t_0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial W}{\partial h}=t+t_0. \qquad (16)$$

где t_0 есть произвольная постоянная. Первые $n-1$ интегралов, т. е. интегралы (14), называются геометрическими. Они не содержат времени и в многомерном пространстве определяют кривую, которая является траекторией изображающей точки. Последний интеграл (16), содержащий время, называется кинематическим; он дает закон движения изображающей точки по траектории. Интегралы (15) называются промежуточными интегралами и служат для определения импульсов p, а также постоянных интегрирования.

Пример. Найдем траекторию и закон движения тяжелой материальной точки массы m в однородном поле тяжести. Направим ось Oz вертикально вверх; тогда

$$U=-mgz;\quad T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

Дифференцируя T по $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, получаем выражения для импульсов

$$p_x=m\dot{x},\quad p_y=m\dot{y},\quad p_z=m\dot{z};$$

отсюда находим

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m};\quad \dot{y}=\frac{p_y}{m};\quad \dot{z}=\frac{p_z}{m}.$$

Следовательно, функция Гамильтона $H=T-U$ будет иметь вид

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+mgz.$$

Заменяя в функции H импульсы частными производными от характеристической функции W по соответствующим координатам и приравнивая полученное выражение постоянной h, получим следующее уравнение Якоби для определения функции W:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2+2m^2gz=2mh. \tag{а}$$

Здесь две координаты x и y циклические, а потому, полагая

$$W=\alpha x+\beta y+f(z)$$

и подставляя в уравнение (а), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\alpha^2+\beta^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2+2m^2gz=2mh. \tag{б}$$

Из уравнения (б) имеем

$$\frac{df(z)}{dz}=\pm\sqrt{2mh-\alpha^2-\beta^2-2m^2gz},$$

откуда, интегрируя, определяем $f(z)$; таким образом, задача свелась к одной квадратуре. Обозначая выражение $f(z)$, полученное после интегрирования, через $f(z;\alpha,\beta,h)$, будем иметь (с точностью до аддитивной постоянной)

$$f(z;\alpha,\beta,h)=\mp\frac{1}{3m^2g}\left(\sqrt{2mh-\alpha^2-\beta^2-2m^2gz}\right)^3. \tag{в}$$

Тогда

$$W=\alpha x+\beta y+f(z;\alpha,\beta,h)+c. \tag{г}$$

Отсюда получаем интегралы движения (14) и (16)

$$x+\frac{\partial f}{\partial\alpha}=b_1,\quad y+\frac{\partial f}{\partial\beta}=b_2,\quad \frac{\partial f}{\partial h}=t-t_0$$

или в явном виде

$$\left.\begin{aligned}&x+\frac{\alpha}{m^2g}F(z;\alpha,\beta,h)=b_1,\quad y+\frac{\beta}{m^2g}F(z;\alpha,\beta,h)=b_2,\\&-\frac{1}{mg}F(z;\alpha,\beta,h)=t-t_0,\end{aligned}\right\} \tag{д}$$

где обозначено

$$F(z;\alpha,\beta,h)=\pm\sqrt{2mh-\alpha^2-\beta^2-2m^2gz}. \tag{д'}$$

Первые два интеграла в системе (д) геометрические; они являются уравнениями цилиндрических поверхностей, пересечение которых дает траекторию точки. Из этих интегралов сразу следует, что

$$\frac{x-b_1}{\alpha}=\frac{y-b_2}{\beta},$$

т. е. что траектория лежит в плоскости, параллельной оси z. Если совместить плоскость Oxz с этой плоскостью, то будет $y\equiv 0$; тогда в равенствах (г) и (д) следует положить $\beta=0$. В этом случае первое из уравнений (д), которое можно представить в виде

$$(x-b_1)^2=\frac{\alpha^2}{m^4g^2}(2mh-\alpha^2-2m^2gz),$$

дает уравнение траектории точки в плоскости Oxz; нетрудно видеть, что это парабола с осью, параллельной оси z.

Третий интеграл в системе (д) кинематический; он дает закон движения точки в виде

$$\frac{2mh-\alpha^2-\beta^2-2m^2gz}{m^2g^2}=(t-t_0)^2;$$

следовательно, координата z при движении возрастает (или убывает) пропорционально $(t-t_0)^2$.

Задача решена при шести произвольных постоянных α, β, b_1, b_2, h, t_0, которые определяются заданием начальных условий, т. е. начального положения точки (три координаты) и начальной скорости (три ее проекции). Для определения этих постоянных надо еще составить три промежуточных интеграла (15), имеющих вид

$$p_x=\alpha,\quad p_y=\beta,\quad p_z=F_z(z;\alpha,\beta,h)\ \ldots \tag{е}$$

Подстановкой начальных данных в равенства (д) и (е) определяются все шесть постоянных интегрирования.

Таким образом, задача решена в самом общем случае и геометрические интегралы сразу охватывают все возможные траектории, чего не дают уравнения движения в форме Лагранжа. В этой большей общности получаемых результатов и заключается преимущество канонических уравнений.

§ 23. Метод Пуассона

1. Скобки Пуассона. В задачах механики часто случается, что по самому характеру данной задачи несколько интегралов канонической системы уравнений, определяющей движение, уже известно. Метод Пуассона дает возможность, зная два интеграла, найти третий и таким образом получить в некоторых благоприятных случаях полную систему независимых между собой интегралов, а следовательно, и определить движение системы. Прежде чем приступить к изложению самого метода, введем несколько предварительных понятий, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть φ и ψ будут функции канонических переменных q, p и времени t, т. е.

$$\varphi,\ \psi \mid q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n;\ t.$$

Выражение, составленное из этих функций, вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\equiv(\varphi,\ \psi) \tag{1}$$

носит название скобки Пуассона.

Из этого определения весьма просто вытекают основные свойства скобок Пуассона; отметим некоторые из этих свойств, которыми придется пользоваться.

1) Очевидны равенства

$$(\varphi,\ \psi)=-(\psi,\ \varphi);\quad (\varphi,\ -\psi)=-(\varphi,\ \psi)=(\psi,\ \varphi).$$

2) Далее, если c есть постоянная величина, то

$$(\varphi,\ c)=0.$$

3) Найдем частную производную от $(\varphi,\ \psi)$ по t; меняя порядок дифференцирования по t и q и по t и p, получим

$$\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial q_i}\right]=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right)+\left(\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right). \tag{2}$$

2. Тождество Пуассона. Возьмем три функции f, φ, ψ, причем

$$f,\ \varphi,\ \psi \mid q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\quad p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n;\ t.$$

Тогда между скобками, составленными из этих функций, имеет место соотношение, которое называется тождеством Пуассона; это тождество имеет вид

$$(f,\ (\varphi,\ \psi))+(\varphi,\ (\psi,\ f))+(\psi,\ (f,\ \varphi))\equiv 0. \tag{3}$$

Доказать это тождество можно непосредственным вычислением входящих в него двойных скобок Пуассона, но это вычисление,

несмотря на свою простоту, довольно громоздко. Для сокращения вычислений можно исходить из того соображения, что каждый член тождества должен обязательно содержать производную второго порядка от функций f, φ или ψ; поэтому, если мы докажем, что левая часть равенства (3) не будет содержать ни одной производной второго порядка, то это покажет, что она равна нулю, и тождество будет доказано. Так как левая часть равенства (3) симметрична относительно функций f, φ и ψ, то доказательство можно провести только для одной функции, например для f, что значительно сократит вычисления. Для этого возьмем сумму двух членов, в которые могут входить вторые производные функции f, т. е.

$$(\varphi,\ (\psi,\ f))+(\psi,\ (f,\ \varphi))=(\varphi,\ (\psi,\ f))-(\psi,\ (\varphi,\ f)),$$

и, вычисляя правую часть этого равенства, легко убедимся, что она вторых производных f содержать не будет.

3. Теорема Пуассона. Прежде чем доказать теорему Пуассона, найдем условие, которому должна удовлетворять функция $f(q,\ p;\ t)$ для того, чтобы $f(q,\ p;\ t)=c$ было интегралом канонической системы уравнений

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Пусть $f(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n;\ t)=c$ есть интеграл системы (4). Так как функция f постоянна для всех значений q и p, определяемых системой (4), то

$$\frac{df}{dt}\equiv\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot p_i\right)\equiv 0. \tag{5}$$

Подставляя в тождество (5) значения $\dot q_i$ и $\dot p_i$ из системы (4), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\equiv 0,$$

или, пользуясь скобками Пуассона,

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,\ H)\equiv 0. \tag{6}$$

Условие (6), следовательно, необходимо и, как легко показать, составляя уравнения характеристик для (6), достаточно для того, чтобы $f=c$ было интегралом системы (4).

Теперь докажем теорему Пуассона, которая состоит в следующем *Если функции* $\varphi(q,\ p;\ t)=a$ и $\psi(q,\ p;\ t)=b$ *будут первыми интегралами канонической системы* (4), *то функция*

$(\varphi, \psi) = c$ *будет тоже интегралом этой системы.* Действительно, так как $\varphi = a$ и $\psi = b$ суть первые интегралы системы (4), то на основании тождества (6) будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) \equiv 0. \tag{7}$$

Но по тождеству Пуассона

$$(H, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, H)) + (\psi, (H, \varphi)) \equiv 0; \tag{8}$$

а так как из равенства (7) следует, что

$$(\varphi, H) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (\psi, H) = -\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

то, принимая во внимание соотношение

$$(H, \varphi) = -(\varphi, H) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

и подставляя эти значения (H, φ) и (ψ, H) в равенство (8) получим

$$(H, (\varphi, \psi)) + \left(\varphi, -\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left(\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \equiv 0,$$

или

$$((\varphi, \psi), H) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) \equiv 0.$$

Так как

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t},$$

то окончательно имеем

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} + ((\varphi, \psi), H) \equiv 0. \tag{9}$$

Тождество (9) показывает, что $(\varphi, \psi) = c$ есть интеграл системы (4), что и требовалось доказать.

Рассмотрим частный случай, когда функция H не зависит явно от времени. В этом случае, как сказано в § 21, п. 4, каноническая система уравнений (4) допускает обобщенный интеграл энергии $H = h$. Предположим, что известен еще один интеграл системы (4),

$$\varphi(q, p; t) = a,$$

где a есть постоянная. Тогда на основании теоремы Пуассона функция $(\varphi, H) = c$ будет также интегралом системы (4). Но так как $\varphi = a$ есть интеграл системы, то на основании тождества (6) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) \equiv 0,$$

откуда $-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (\varphi, H)$, и мы получаем интеграл

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c.$$

Таким образом, если $\varphi = a$ есть интеграл канонической системы с функцией H, явно от времени не зависящей, то $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c$ будет также интегралом этой системы, а следовательно, интегралами будут и функции $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_1$, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = c_2$ и т. д. Если же функция φ явно от времени не зависит, то $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, и следовательно, $(\varphi, H) \equiv 0$; поэтому (φ, H) уже не будет интегралом системы (4).

Итак, метод Пуассона дает способ, посредством которого можно по двум известным интегралам канонической системы найти третий и т. д. Казалось бы, что этим процессом можно получить все $2n$ интегралов системы, но это, к сожалению, не всегда удается. Часто случается, что скобка Пуассона от двух интегралов или является функцией уже найденных интегралов или же тождественно обращается в нуль и, следовательно, не дает интеграла.

Если мы возьмем систему интегралов $f_1, f_2, \ldots, f_m$, причем

$$f_1, f_2, \ldots, f_m | q_1, q_2, \ldots, q_n; \; p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

и если

$$(f_i, f_k) \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

то такая система носит название инволюционной системы интегралов следовательно, если мы имеем два интеграла, принадлежащих к инволюционной системе, например f_i и f_k, то скобка Пуассона (f_i, f_k) нового интеграла не даст.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 24. Введение. Подразделение принципов

1. Введение. Под термином «принцип» мы будем подразумевать такое аксиоматическое положение, которое, обладая достаточной общностью, является для данной области науки основным, так что все остальные положения вытекают из него как логическое следствие. В развитии наук всегда существовало и существует стремление свести систему данной науки к наименьшему числу исходных положений и в идеальном случае к одному основному принципу, который потенциально заключал бы в себе все содержание этой науки и объединял бы все ее положения. Это стремление, вызываемое, с одной стороны, требованием научной эстетики, имеет, с другой стороны, целью найти наиболее общие законы природы. Создание основных объединяющих принципов преследует цель не только исключительно компактной систематизации фактов, но и ставит более высокие задачи познания законов окружающего нас мира, к которому мы с прогрессом науки можем неограниченно приближаться путем наблюдения, опыта и логической обработки результатов. Очень важно, чтобы принцип удовлетворял не только присущим ему по существу логическим требованиям, но и обладал еще эвристической ценностью, т. е. чтобы из него, как следствие, вытекали не только те факты, синтезом которых он является, но и те, которые во время создания этого принципа не были известны; тогда мы можем сказать, что этот принцип действительно представляет собой найденный нами объективный закон природы (например, периодический закон Менделеева, уравнения Максвелла и др.).

2. Принципы механики. В истории развития механики принципы играли очень большую роль. Созданные на базе гениальных исследований Галилея законы Ньютона, являющиеся по существу принципами, легли в основу этой науки и в значительной степени послужили ее развитию; принцип Даламбера дал могущественный метод для решения разнообразных задач, а принцип виртуальных

перемещений Лагранж считал основным для всей механики. В настоящее время учение о принципах механики, в особенности вариационных, находится в достаточном развитии; мы имеем различные принципы механики, и все они обладают общим свойством: из них логически вытекают уравнения движения, а следовательно, и остальные положения механики, ибо, как известно, последние мы всегда можем получить из этих уравнений. Разница между различными принципами заключается в большей или меньшей общности их применения по отношению к различным механическим системам. Отсюда ясно, что из какого-либо одного принципа можно получить, как следствие, все остальные, причем область применимости этих остальных будет та же, что и исходного принципа.

Принципы механики могут быть невариационные и вариационные; как те, так и другие разделяются также на дифференциальные и интегральные.

Невариационный принцип представляет собой некоторое общее для всех движений свойство, которое имеет место или для данного момента времени (дифференциальный принцип), или для конечного интервала времени (интегральный принцип); например, принцип сохранения энергии есть невариационный интегральный принцип, а принцип Даламбера — дифференциальный.

Вариационный принцип дает признак, отличающий истинное, реальное движение от класса других движений, кинематически возможных при тех же условиях, и состоящий в том, что для истинного движения определенная функция, зависящая от координат и их производных, дает экстремум по сравнению с другими движениями, принадлежащими к определенному классу. Таким образом, для каждого вариационного принципа нужно установить: 1) функцию, которая для истинного движения обладает экстремальными свойствами, и 2) класс движений, по сравнению с которыми эта функция дает экстремум для истинного движения; отсюда следует, что получение уравнений движения из вариационного принципа сводится к вариационной задаче при тех или иных дополнительных условиях. Вариационные принципы, так же как и невариационные, разделяются на дифференциальные и интегральные; первые дают критерий истинного движения, отнесенный к моменту, а вторые — к конечному интервалу времени.

В настоящей главе мы будем рассматривать только вариационные принципы, причем сначала дифференциальные, а затем интегральные.

§ 25. Дифференциальные принципы

1. Принцип виртуальных перемещений и принцип Даламбера — Лагранжа. Принцип виртуальных перемещений можно формулировать так: *положение равновесия системы отличается от* *смежных положений, совместимых со связями, тем, что только для положения равновесия сумма элементарных работ активных сил, действующих на систему, для всяких виртуальных перемещений системы равна нулю*, т. е. для положения равновесия мы имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

или, выражая все величины через их проекции и пользуясь обозначениями, оговоренными в § 7, п. 1,

$$\sum_{i=1}^{3N} X_i \delta x_i = 0. \qquad (1)$$

Хотя в выражение этого принципа и не входит вариация какой-либо функции, но он имеет характер дифференциального вариационного принципа, потому что в левой части его аналитического выражения мы имеем линейную функцию вариаций координат, что, по существу, является вариационным выражением.

Если предположить, что активные силы системы имеют потенциал, т. е. если

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N),$$

то

$$\sum_i X_i \delta x_i = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = \delta U,$$

и, следовательно, выражение принципа приобретает вид

$$\delta U = 0. \qquad (2)$$

В этом частном случае, т. е. когда система сил потенциальна, мы получаем, что для положения равновесия системы вариация от потенциальной функции должна равняться нулю, т. е. принцип имеет уже явно вариационный характер.

Соединяя принцип виртуальных перемещений с принципом Даламбера, мы получаем принцип Даламбера — Лагранжа, дающий критерий, по которому истинное движение в каждый момент отличается от кинематически возможного, т. е. совместимого со связями, что более полно формулируется следующим образом: *во всякий момент времени истинное движение отличается от кинематически возможного тем, что только для истинного движения сумма элементарных работ сил активных и сил инерции при всяких виртуальных перемещениях системы равна нулю*, т. е. для истинного движения имеем

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i - m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

или, в проекциях,

$$\sum_i \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i = 0. \qquad (3)$$

Здесь, так же как и в предыдущем случае, в выражение принципа входит не варьируемая функция, а линейная функция вариаций координат, которую можно рассматривать как результат вариационного процесса; поэтому принцип Даламбера — Лагранжа благодаря вариационному характеру принципа виртуальных перемещений (называемого часто принципом Лагранжа) является вариационным, и притом дифференциальным, так как движения сравниваются в каждый момент времени.

Из принципа Даламбера — Лагранжа можно вывести уравнения движения системы, когда на нее наложены связи голономные или неголономные линейные, в чем мы имели возможность убедиться при их выводе (гл. II).

2. Принцип Гаусса (принцип наименьшего принуждения). Принцип Даламбера — Лагранжа не единственный принцип дифференциального типа. Принцип Гаусса, или принцип наименьшего принуждения, также является дифференциальным принципом; его преимущество по сравнению с принципом Даламбера — Лагранжа состоит в том, что он дает возможность получить уравнения движения системы *при каких угодно* неголономных связях, в то время как из принципа Даламбера — Лагранжа эти уравнения получаются лишь в случае *линейных* неголономных связей. Таким образом, принцип Гаусса является наиболее общим принципом механики и обладает большой эвристической ценностью, благодаря которой он послужил основанием для дальнейшего развития механики. Достаточно указать на механику Г. Герца, которая возникла главным образом на основании идей, заключающихся в этом принципе

Принуждением в данный момент Гаусс называет меру отклонения системы, движущейся под действием активных сил при наложенных на неё произвольных голономных и неголономных связях, от свободного движения, которое она имела бы, начиная с рассматриваемого момента, двигаясь под действием тех же активных сил, если бы с этого момента были устранены наложенные на нее связи.

Пусть точка системы с массой m_i находится в момент времени t в положении M_i (рис. 85). За весьма малый промежуток времени τ точка по инерции совершит перемещение $\overline{M_i A_i} = \boldsymbol{v}_i \tau$, где $\boldsymbol{v}_i$ есть скорость, которую она имеет в момент t. Если на точку будет действовать активная сила $\boldsymbol{F}_i$, то под действием этой силы *свободная* точка за тот же промежуток времени τ совершит перемещение $\overline{M_iB_i}$, которое, с точностью до малых третьего порядка, будет равно

$$\overline{M_iB_i} = \boldsymbol{v}_i\tau + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\tau^2.$$

Если же на рассматриваемую точку наложить еще связи, то ее перемещение под действием силы $\boldsymbol{F}_i$ и при наличии связей будет с точностью до малых третьего порядка

$$\overline{M_iC_i} = \boldsymbol{v}_i\tau + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_i\tau^2,$$

где $\boldsymbol{w}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_i$ есть ускорение точки.

Отклонение точки от свободного движения представится вектором $\overline{B_iC_i}$; ясно, что

$$\overline{B_iC_i} = \overline{M_iC_i} - \overline{M_iB_i} = \frac{1}{2}\tau^2\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)$$

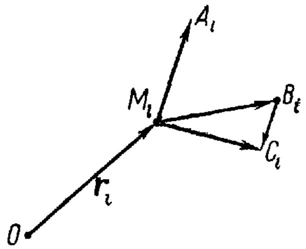


Рис. 85.

с точностью до малых третьего порядка.

За меру отклонения точки от свободного движения Гаусс принимает величину, пропорциональную квадрату отклонения $\overline{B_iC_i}$, которую называет «принуждением» (по-немецки Zwang); принуждение выражается так:

$$\mathfrak{Z}w_i = \frac{1}{2}m_i\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2.$$

Суммируя принуждения для всех точек системы, найдем принуждение для всей системы:

$$\mathfrak{Z}w = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2, \qquad (4)$$

или, выражая все величины через их проекции,

$$\mathfrak{Z}w = \sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2. \qquad (4')$$

Идея меры отклонения системы от свободного движения в форме суммы величин, пропорциональных квадратам отклонений частиц системы, — заимствована Гауссом в им же построенной теории ошибок.

Принцип Гаусса состоит в том, что *в каждый момент времени истинное движение системы, находящейся под действием активных сил и подчиненной идеальным связям, отличается от всех кинематически возможных (т. е. согласных с теми же связями)*

движений, совершающихся из той же начальной конфигурации и с теми же начальными скоростями, тем свойством, что для истинного движения мера отклонения от свободного движения, т. е. принуждение, есть минимум. Математически это означает, что для истинного движения

$$\delta\mathfrak{Z}w = 0,$$

причем вариация берется при неизменяемых координатах и скоростях, т. е. *варьируются только ускорения*; такого рода вариацию некоторые авторы называют гауссовой вариацией.

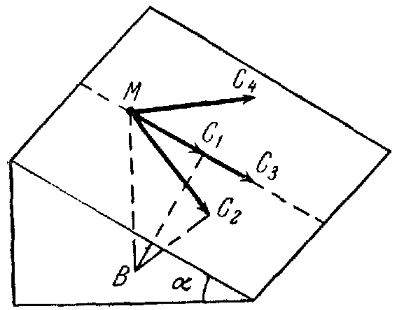


Рис. 86.

Выполняя варьирование функции $\mathfrak{Z}w$ и приравнивая найденную вариацию нулю, будем иметь

$$\delta\mathfrak{Z}w \equiv \sum_i (X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i = 0. \qquad (5)$$

Принцип Гаусса можно проиллюстрировать следующим простым примером. Пусть материальная точка движется в поле сил тяжести вдоль гладкой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, причем движение начинается из положения M без начальной скорости (рис. 86). Кинематически возможны перемещения точки с разными ускорениями $\boldsymbol{w}_i$, если вектор $\boldsymbol{w}_i$ лежит в этой плоскости; при этом, так как по Гауссу координата, скорость и время не варьируются, то все рассматриваемые перемещения должны начинаться из положения M без начальной скорости и совершаться за один и тот же промежуток времени τ. Тогда эти перемещения будут равны

$$\overline{MC}_1 = \frac{\tau^2}{2}\boldsymbol{w}_1, \quad \overline{MC}_2 = \frac{\tau^2}{2}\boldsymbol{w}_2, \ \ldots$$

Действующей на точку активной силой является сила тяжести $m\boldsymbol{g}$; свободное перемещение точки под действием этой силы за то же время τ при $\boldsymbol{v}_0 = 0$ будет направлено по вертикали вниз и равно $\overline{MB} = \frac{\tau^2}{2}\boldsymbol{g}$. Тогда принуждение при каждом из рассматриваемых кинематически возможных движений будет пропорционально квадрату векторов $\overline{BC}_1$, $\overline{BC}_2$, ... Легко видеть, что наименьшим из всех векторов $\overline{BC}_i$ является вектор $\overline{BC}_1$, направленный по перпендикуляру, опущенному из точки B на наклонную плоскость; при этом численно $BC_1 = MB\sin\alpha$, откуда $w_1 = g\sin\alpha$. Таким образом, с помощью принципа Гаусса приходим к известному результату: движение точки вдоль наклонной плоскости при $v_0 = 0$ происходит по линии наименьшего ската с ускорением $w_1 = g\sin\alpha$.

3. Вывод уравнений движения системы из принципа Гаусса. Прежде всего заметим, что если на систему не наложено никаких связей, то вариации ускорений $\delta\ddot{x}_i$ будут независимыми, и следовательно,

$$X_i - m_i\ddot{x}_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N).$$

В этом случае все точки системы будут свободными, и мы для них получаем обычные уравнения движения. Это, между прочим, следует и из принципа Даламбера — Лагранжа (3), так как если система свободная, то все вариации координат независимы и мы приходим к тем же уравнениям.

Пусть теперь на систему наложено k голономных связей

$$f_\varkappa(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{3n};\ t) = 0 \qquad (\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

и r неголономных связей какого угодно вида

$$\varphi_\rho(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{3n};\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \ldots,\ \dot{x}_{3n};\ t) = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Дифференцируя дважды функции $f_\varkappa(x;\ t)$ по времени, получим

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i}\ddot{x}_i + \Phi_\varkappa(x;\ \dot{x};\ t) = 0 \qquad (\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

где символом $\Phi_\varkappa$ обозначено выражение, не содержащее ускорений. Варьируя затем полученное выражение и имея в виду, что варьируются только ускорения, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i}\delta\ddot{x}_i = 0 \qquad (\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{6}$$

Дифференцируя теперь функции $\varphi_\rho(x;\ \dot{x};\ t)$ по времени один раз, получим

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \Psi_\rho(x;\ \dot{x};\ t) = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

где символом Ψ_ρ обозначено выражение, не содержащее ускорений.

Варьируя затем полученное выражение, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot{x}_i}\delta\ddot{x}_i = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) показывают, что из $3N$ вариаций ускорений $\delta\ddot{x}$ зависимых будет $k + r$, а остальные $3N - (k + r)$ будут независимы. В соответствии с этим введем $k + r$ неопределенных множителей Лагранжа; с этой целью умножаем равенства (6) и (7) соответственно на $\lambda_\varkappa$ и μ_ρ, суммируем первые по $\varkappa$ от 1 до k, а вторые по ρ от 1 до r; получим

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_\varkappa\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i}\delta\ddot{x}_i = 0$$

и

$$\sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot{x}_i}\delta\ddot{x}_i = 0.$$

Меняя теперь в обеих двойных суммах порядок суммирования, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{3N}\left(\sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_\varkappa\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i}\right)\delta\ddot{x}_i = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{3N}\left(\sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta\ddot{x}_i = 0. \tag{9}$$

Складывая найденные выражения (8) и (9) с основным уравнением (5), получим

$$\sum_{i=1}^{3N}\left[X_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i} + \sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot{x}_i}\right]\delta\ddot{x}_i = 0.$$

Так как число зависимых вариаций равно $k + r$, то $k + r$ неопределенных множителей Лагранжа выберем так, чтобы выражения в квадратных скобках при зависимых вариациях равнялись нулю; тогда остальные квадратные скобки вследствие независимости оставшихся вариаций будут также равны нулю, и таким образом мы получаем $3N$ уравнений движения системы

$$X_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_\varkappa\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i} + \sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N). \tag{10}$$

Присоединяя уравнения связей, будем иметь $3N + k + r$ уравнений с $3N + k + r$ неизвестными.

4. Вывод принципа наименьшего принуждения из принципа Даламбера — Лагранжа. Рассмотрим точку системы с массой m_i, занимающую в момент времени t положение M_i. Пусть, как и в п. 2, элементарные перемещения этой точки за малый промежуток времени τ по инерции и свободное под действием активной силы $\boldsymbol{F}_i$ изображаются соответственно векторами $\overline{M_iA_i}$ и $\overline{M_iB_i}$, и пусть вектор $\overline{M_iC_i}$

изображает истинное перемещение точки за время τ под действием той же активной силы и при наличии связей (рис. 87). Рассмотрим какое-нибудь другое кинематически допустимое элементарное перемещение $\overline{M_iC_i'}$, которое точка могла бы совершить за тот же промежуток времени τ, не нарушая наложенных связей и начиная движение из того же положения M_i и с той же скоростью $\boldsymbol{v}_i$, но двигаясь с другим ускорением $\boldsymbol{w}_i'$, отличным от ускорения $\boldsymbol{w}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ в истинном движении (напоминаем, что в принципе Гаусса варьируется только ускорение).

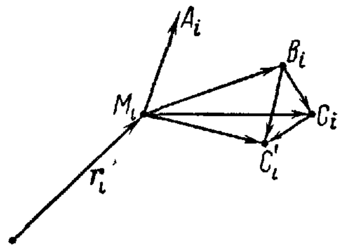


Рис. 87.

Покажем, что для истинного движения принуждение будет меньше, чем для любого другого указанного выше кинематически допустимого движения.

Прежде всего, ясно, что

$$\overline{B_iC_i'}=\overline{B_iC_i}+\overline{C_iC_i'};$$

возведя в квадрат обе части составленного равенства, получим

$$\overline{(B_iC_i')}^2=\overline{(B_iC_i)}^2+\overline{(C_iC_i')}^2+2\overline{B_iC_i}\cdot\overline{C_iC_i'}. \qquad (11)$$

В п. 2 мы имели равенства

$$\overline{B_iC_i}=\frac{\tau^2}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right) \quad \text{и} \quad З\boldsymbol{w}_i=\frac{m_i}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2;$$

отсюда для истинного движения

$$З\boldsymbol{w}_i=\frac{2}{\tau^4}m_i\cdot(\overline{B_iC_i})^2 \quad \text{и} \quad З\boldsymbol{w}=\frac{2}{\tau^4}\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot(\overline{B_iC_i})^2.$$

Для сравниваемого кинематически возможного движения имеем

$$З\boldsymbol{w}'=\frac{2}{\tau^4}\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot(\overline{B_iC_i'})^2,$$

или, подставляя вместо $\overline{(BC_i')}^2$ выражение (11),

$$З\boldsymbol{w}'=\frac{2}{\tau^4}\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot(\overline{B_iC_i})^2+\frac{2}{\tau^4}\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot(\overline{C_iC_i'})^2+$$
$$+\frac{2\cdot 2}{\tau^4}\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot(\overline{B_iC_i})\cdot(\overline{C_iC_i'}). \qquad (12)$$

Рассмотрим третий член правой части равенства (12); он равен нулю. Действительно, кинематически возможное перемещение $\overline{M_iC_i'}$ совершается при сохранении наложенных связей и за тот же промежуток времени τ, что и истинное перемещение $\overline{M_iC_i}$, следовательно, вектор $\overline{C_iC_i'}$, соединяющий истинное положение точки в момент $t+\tau$ и какое-то другое положение, которое она может занимать в тот же момент при сохранении наложенных связей, представляет собой виртуальное перемещение точки в момент $t+\tau$, т. е. $\overline{C_iC_i'}=\delta\boldsymbol{r}$. Тогда, принимая во внимание выражение для вектора $\overline{B_iC_i}$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot\overline{B_iC_i}\cdot\overline{C_iC_i'}=\frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i.$$

Но, в силу принципа Даламбера — Лагранжа [формула (3)],

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0,$$

а следовательно, и третий член правой части (12) равен нулю.

Итак, имеем

$$З\boldsymbol{w}'=З\boldsymbol{w}+\frac{2}{\tau^4}\sum_{i=1}^{N}m_i\ \overline{C_iC_i'}^2,$$

откуда ясно, что

$$З\boldsymbol{w}'>З\boldsymbol{w},$$

т. е для истинного движения принуждение имеет минимум.

5. Принцип прямейшего пути Г. Герца. Из принципа Гаусса непосредственно вытекает принцип прямейшего пути Г. Герца, который является обобщением ньютонова закона инерции. Этот принцип состоит в том, что *всякая «свободная» система движется по прямейшему пути (т. е. по пути с наименьшей кривизной)*. Сам Герц формулировал свой принцип, перефразируя первый закон Ньютона, так: «Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam» (т. е. всякая «свободная» система стремится пребывать в состоянии покоя или равномерного движения по прямейшему пути). Нужно заметить, что Герц в своей механике устраняет понятие о силе в том виде, как оно фигурирует в механике Ньютона, и рассматривает силы как эффект явных или скрытых связей; поэтому понятие «свободная система» в смысле Герца означает, что точки системы находятся только под действием наложенных на систему связей.

Пусть имеем систему N материальных точек, координаты которых обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{3N}$. Герц вводит понятие о траектории системы, определяя ее как кривую в пространстве $3N$ измерений, элемент дуги которой равен

$$ds^2 = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu ds_\nu^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3N} m_i d\xi_i^2 = \sum_{i=1}^{3N} dx_i^2, \tag{13}$$

где

$$x_i = \sqrt{\frac{m_i}{M}}\,\xi_i, \quad M = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3N} m_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu.$$

M называется массой системы, а величина $\frac{ds}{dt} = \sum_i \dot{x}_i^2$ — скоростью системы.

Известно, что кривизна k кривой в трехмерном пространстве определяется равенством

$$k^2 = \frac{1}{\rho^2} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2;$$

обобщая эту формулу на $3N$-мерное пространство, получим

$$k^2 = \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2. \tag{14}$$

Возьмем выражение гауссова принуждения (4′) при отсутствии активных сил; имеем

$$\mathfrak{Z}w = \frac{1}{2}\sum_i m_i\ddot{\xi}_i^2 \quad \text{или} \quad \mathfrak{Z}w = \frac{1}{2}\sum_i \ddot{x}_i^2 \,{}^{1)}. \tag{15}$$

Так как

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds}\dot{s}, \quad \ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{ds^2}\dot{s}^2 + \frac{dx_i}{ds}\ddot{s},$$

то, возводя $\ddot{x}_i$ в квадрат, получим

$$\ddot{x}_i^2 = \left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2\dot{s}^4 + \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\ddot{s}^2 + 2\frac{dx_i}{ds}\frac{d^2x_i}{ds^2}\dot{s}^2\ddot{s}.$$

Подставляя полученное выражение в равенство (15), находим

$$2\mathfrak{Z}w = \sum_i\left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2\dot{s}^4 + \sum_i\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\ddot{s}^2 + 2\sum_i\frac{dx_i}{ds}\frac{d^2x_i}{ds^2}\dot{s}^2\ddot{s}. \tag{16}$$

Но из равенства (13) следует, что

$$\sum_i\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = 1,$$

[1]) Множитель M, как постоянный, в выражении $\mathfrak{Z}w$ опускаем.

откуда, дифференцируя по s, имеем

$$\sum_i \frac{dx_i}{ds}\frac{d^2x_i}{ds^2} = 0.$$

Принимая это во внимание, получим из равенства (16)

$$2\mathfrak{Z}w = k^2\dot{s}^4 + \ddot{s}^2.$$

Так как активные силы отсутствуют, то при склерономных связях

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2}M\sum_i\dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 = \text{const}; \tag{17}$$

следовательно, $\dot{s} = \text{const}$, и

$$\ddot{s} = 0;$$

поэтому

$$2\mathfrak{Z}w = k^2\dot{s}^4.$$

По принципу Гаусса для истинного движения $\mathfrak{Z}w$ есть минимум, но так как на основании равенства (17) $\dot{s} = \text{const}$, то k должно иметь минимум. Отсюда вытекает *принцип прямейшего пути: для механической системы, подчиненной склерономным связям и свободной от действия сил, истинное движение происходит с постоянной скоростью, причем траектория системы имеет наименьшую кривизну по сравнению со всеми другими траекториями, допускаемыми связями.*

§ 26. Интегральные принципы

1. Замечания о варьировании. Пусть точка имеет одну степень свободы и положение ее определяется координатой

$$q = f(t).$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$dq = f'(t)\,dt.$$

Здесь мы имеем изменение функции q вследствие изменения самого аргумента, т. е. времени; дифференциал координаты соответствует поэтому ее изменению вследствие действительного движения (рис. 88).

Изменим теперь вид самой функции $q = f(t)$ и положим

$$\tilde{q} = f(t) + \varepsilon\eta(t),$$

где ε есть произвольно малое постоянное число, а $\eta(t)$ — произвольная дифференцируемая функция времени. В этом случае изменение координаты q вследствие изменения вида самой функции обозначается через δq и называется простой или изохронной вариацией (рис. 89); следовательно, будем иметь

$$\delta q = \tilde{q} - q = \varepsilon\eta(t). \qquad (1)$$

Докажем, что изохронная вариация и дифференцирование по времени обладают свойством коммутативности, т. е. что

$$\frac{d}{dt}\delta q = \delta\frac{dq}{dt}. \qquad (2)$$

В самом деле, дифференцируя равенство (1) по t, получим

$$\frac{d}{dt}\delta q = \dot{\tilde{q}} - \dot{q} = \delta\dot{q},$$

так как, согласно определению изохронной вариации,

$$\dot{\tilde{q}} - \dot{q} = \delta\dot{q};$$

таким образом, требуемое доказано. Заметим еще, что в случае изохронной вариации $\delta t = 0$.

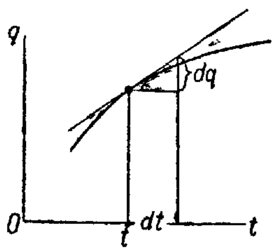


Рис. 88.

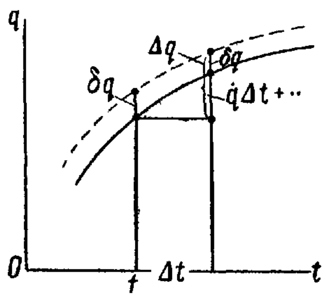


Рис. 89.

Введем теперь понятие о полной вариации. Полной вариацией будем называть изменение функции как вследствие изменения вида функции, так и вследствие изменения аргумента; полную вариацию q будем обозначать через Δq. Изменение аргумента можно ввести следующим образом. Положим

$$\tilde{t} = t + \varepsilon\xi(t),$$

где через $\tilde{t}$ обозначен измененный аргумент, а через $\xi(t)$ — произвольная дифференцируемая функция. Обозначая изменение аргумента через Δt, т. е. полагая

$$\tilde{t} - t = \Delta t, \quad \text{или} \quad \Delta t = \varepsilon\xi(t),$$

будем иметь следующее выражение для полной вариации функции q.

$$\Delta q = \delta q + \dot{q}\,\Delta t, \qquad (3)$$

т. е. изменение функции Δq состоит из двух частей; первая δq есть изохронная вариация, вторая $\dot{q}\,\Delta t$ есть изменение функции q вследствие изменения аргумента t на величину Δt. Эта формула наглядно показана на рис. 89.

Докажем, что полная вариация и дифференцирование по t свойством коммутативности не обладают. Действительно, дифференцируя равенство (3) по времени, получим

$$\frac{d}{dt}\Delta q = \delta\dot{q} + \ddot{q}\,\Delta t + \dot{q}\frac{d\,\Delta t}{dt}.$$

Но для полной вариации функции $\dot{q}$ будем иметь, согласно равенству (3):

$$\Delta\dot{q} = \delta\dot{q} + \ddot{q}\,\Delta t.$$

Подставляя отсюда выражение $\ddot{q}\,\Delta t$ в предыдущее равенство, получим

$$\frac{d\,\Delta q}{dt} = \Delta\dot{q} + \dot{q}\frac{d\,\Delta t}{dt}. \qquad (4)$$

Из равенства (4) ясно, что $\frac{d\,\Delta q}{dt} \neq \Delta\frac{dq}{dt}$ и что эти выражения будут равны только в том случае, если $\frac{d\,\Delta t}{dt} = 0$, т. е. если вариация изохронная.

Но для случая $q = t$ между операциями полного варьирования и дифференцирования по времени имеет место свойство коммутативности. Действительно, из равенств

$$\Delta t = \tilde{t} - t = \varepsilon\xi(t) \quad \text{и} \quad d\tilde{t} - dt = \varepsilon\xi'(t)\,dt = \Delta\,dt$$

очевидно, что

$$\frac{d\,\Delta t}{dt} = \varepsilon\xi'(t), \qquad \frac{\Delta\,dt}{dt} = \varepsilon\xi'(t),$$

откуда имеем

$$d\,\Delta t = \Delta\,dt.$$

2. Принцип стационарного действия Гамильтона[1]. Принцип стационарного действия Гамильтона исторически является более поздним принципом, чем принцип Лагранжа — Мопертюи (см. п. 7). Однако логически целесообразнее изложить сначала принцип Гамильтона, как более общий.

---

[1]) Принцип был изложен Гамильтоном в работах 1834—1835 гг. для случая стационарных связей. Независимо от него и в более общей форме, охватывающей случай нестационарных связей, принцип был сформулирован в 1848 г. М. В. Остроградским (см. сборник «Вариационные принципы механики», М., 1959). По указанной причине многие авторы называют этот принцип принципом Гамильтона — Остроградского.

Чтобы выяснить смысл принципа Гамильтона, обратимся опять к интерпретации движения в многомерном пространстве. Пусть в момент $t=t_0$ система характеризуется точкой A многомерного пространства, а в момент $t=t_1$ — точкой B. Следовательно, за промежуток времени t_1-t_0 система под действием сил перейдет из конфигурации A в конфигурацию B. Пусть траекторией движения системы будет кривая AB (рис. 90). Кинематически возможны и другие траектории, например AnB и т. п., по которым система за тот же промежуток времени t_1-t_0 может перейти из положения A в положение B. Траектории AnB называются траекториями сравнения (или окольными путями), а траекторию AB называют еще прямым путем. Все траектории сравнения должны допускаться связями и проходить через фиксированные точки A и B. Движения по траекториям сравнения, совершающиеся за тот же промежуток времени t_1-t_0, называются возможными или кинематически допустимыми движениями.

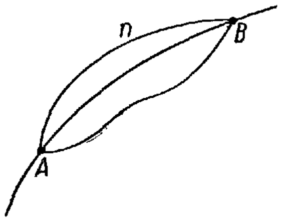


Рис. 90.

Сущность принципа Гамильтона состоит в том, что он дает критерий, на основании которого мы в состоянии среди всех кинематически допустимых движений указать истинное движение или среди всех траекторий сравнения определить ту, по которой действительно будет происходить движение системы между конфигурациями A и B.

Покажем теперь, как из уравнений движения Лагранжа можно получить выражение принципа Гамильтона. Возьмем уравнения движения для голономной системы с n степенями свободы, находящейся под действием потенциальных сил; имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

Умножая левую часть каждого из уравнений (5) на δq_i и складывая, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right]=0. \tag{6}$$

Учитывая соотношение (2), найдем, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right);$$

подставляя это выражение в равенство (6), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right). \tag{7}$$

Так как $L=L(q,\ \dot q;\ t)$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)=\delta L;$$

поэтому равенство (7) принимает вид

$$d\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)=\delta L\,dt. \tag{8}$$

Возьмем от обеих частей этого равенства определенные интегралы в пределах от $t=t_0$ до $t=t_1$, где t_0 — момент времени, в который система находится в конфигурации A, а t_1 — момент, когда она приходит в конфигурацию B; получим

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)\right]_{t_0}^{t_1}=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt. \tag{9}$$

Так как точки A и B фиксированы (см. рис. 90), то $[\delta q_i]_{t_0}=0$ и $[\delta q_i]_{t_1}=0$. Следовательно, для истинного движения системы между двумя конфигурациями A и B мы имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=0,$$

или, так как вариация изохронная,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=0. \tag{10}$$

Интеграл

$$\int_{t_1}^{t_1}L\,dt=S \tag{11}$$

принято называть *действием* по Гамильтону; следовательно, равенство (10) можно представить в виде:

$$\delta S=0. \tag{10'}$$

Равенства (10) или (10′) являются математическим выражением принципа Гамильтона, который формулируется так: *действительное движение системы между двумя заданными конфигурациями отличается от кинематически возможных движений, совершаемых между теми же конфигурациями и в тот же самый промежуток времени, тем, что для действительного (истинного) движения вариация действия по Гамильтону равна нулю; или,* *иными словами, для действительного движения действие по Гамильтону имеет стационарное значение.*

Для динамической системы

$$L = T + U,$$

где $T+U$ есть разность между кинетической и потенциальной энергиями системы, и выражение принципа Гамильтона имеет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = 0, \tag{12}$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\,dt = 0. \tag{12'}$$

Равенству (10), выражающему принцип Гамильтона, можно придать другой вид, введя в него функцию Гамильтона H^*. Так как

$$H^* = -L + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i, \tag{13}$$

то, определяя отсюда функцию Лагранжа L и подставляя в выражение принципа (10), получим

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(-H^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) dt = 0. \tag{14}$$

Это выражение принципа, как и (14), имеет место только для системы, находящейся под действием потенциальных сил.

Заметим, наконец, что действие по Гамильтону можно представить в виде

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = (t_1 - t_0) L^*,$$

где L^* есть среднее значение функции Лагранжа в промежутке времени $t_1 - t_0$. Размерность величины S есть работа $\times$ время (единицы измерения в системе СИ *кгм²/сек*; в технической системе единиц *кГм сек*).

3. Вывод уравнений движения из принципа Гамильтона. Постулируя принцип Гамильтона как основной, нетрудно получить из него уравнения движения. Имеем выражение принципа Гамильтона:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt = 0.$$

Развертывая вариацию δL, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0. \tag{15}$$

Применяя к членам второй суммы интегрирование по частям и имея в виду свойство коммутативности для изохронной вариации, будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i)\,dt =$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt,$$

ибо $[\delta q_i]_{t_0}^{t_1} = 0$, что нам уже встречалось.

Имея в виду полученное равенство и подставляя его в уравнение (15), найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \tag{16}$$

Равенство (16) также представляет собой математическое выражение принципа Гамильтона. Так как интервал интегрирования здесь произволен и вариации координат δq_i независимы, то равенство нулю интеграла возможно только при условии равенства нулю подынтегрального выражения; следовательно, для действительного движения получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. уравнения движения в форме Лагранжа.

С точки зрения вариационного исчисления уравнения Лагранжа являются уравнениями пучка экстремалей, причем та из них, которая проходит через точки A и B, дает экстремум интеграла $\int_{t_0}^{t_1} L\,dt$ или, иными словами, дает экстремум действия по Гамильтону; эта экстремаль и будет истинной траекторией движения.

4. Обобщение принципа Гамильтона на случаи неконсервативной и неголономной систем. Для динамической системы принцип Гамильтона можно представить равенством

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\,dt = 0.$$

Введем в него вместо члена δU, выражающего элементарную работу потенциальных сил, величину

$$\delta' A=\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i, \tag{17}$$

т. е. элементарную работу сил непотенциальных, выраженную через обобщенные силы (здесь символ δ' уже не обозначает вариацию какой-либо функции). Тогда получим

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta' A)\,dt=0$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T+\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i\right) dt=0. \tag{18}$$

В этой форме принцип имеет место и для системы, находящейся под действием непотенциальных сил. Равенству (18) можно еще придать другой вид, если интеграл от δT преобразовать так же, как это было сделано в п. 3 с интегралом от δL, т. е. к виду, аналогичному (16). Тогда получим выражение принципа Гамильтона для неконсервативной системы в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+Q_i\right]\delta q_i dt=0\ldots \tag{19}$$

Отсюда сразу следует справедливость принципа в форме (18) для неконсервативной системы, так как его выражение (19) дает уравнения движения этой системы. В самом деле, поскольку интервал t_1-t_0 произволен, а δq_i между собой независимы, то из (19) получаются уравнения движения системы в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Можно убедиться, что принцип Гамильтона в форме (19) справедлив и для системы с линейными неголономными связями, так как из него можно получить и уравнения движения такой системы. Действительно, если на систему наложены r линейных неголономных связей, уравнения которых имеют вид (см. § 8, п. 9)

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\rho i}\, dq_i+A_\rho dt=0 \qquad (\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

то при этом вариации координат должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\rho i}\delta q_i=0 \qquad (\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Умножим каждое из этих равенств на лагранжев множитель λ_ρ и просуммируем по ρ. Полученное выражение, равное нулю, прибавим к сумме, стоящей под знаком интеграла (19). Тогда будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+Q_i+\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho A_{\rho i}\right]\delta q_i dt.$$

Теперь выбором множителей λ_ρ обращаем в нуль ρ слагаемых в сумме, стоящей под знаком интеграла; тогда остальные слагаемые также должны быть равны нулю, поскольку оставшиеся под знаком интеграла $n-r$ вариаций δq_i между собой независимы. В результате получим известное нам уравнение движения неголономной системы с множителями Лагранжа [см. § 8, п. 9, уравнения (54)].

Отметим в заключение, что принцип Гамильтона, обобщенный на случай неконсервативной и неголономной систем, уже не является вариационным, так как выражения (18) или (19) не представляют собой вариацию какого-нибудь интеграла.

Принцип Гамильтона в вариационной форме (10) обладает тем важным преимуществом, что он не связан ни с какой системой координат; в его выражение входят лишь функция L и время. Поэтому данный принцип при соответствующем обобщении понятий находит широкие приложения в различных областях физики.

5. Действие по Гамильтону и главная функция S в уравнении Якоби. Докажем, что действие по Гамильтону совпадает с главной функцией S в уравнении Якоби. Для этого рассмотрим S как функцию времени t, полагая

$$S=\int_{t_0}^{t} L\,dt,$$

т. е. считая верхний предел у интеграла переменным. Дифференцируя теперь функцию S по времени, получим

$$\frac{dS}{dt}=L. \tag{20}$$

Обратимся к уравнению Якоби [см. § 22, формула (7)]

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q;\ \frac{\partial S}{\partial q};\ t\right)=0,$$

полный интеграл которого будет

$$S = \tilde{S}(q_1, q_2, \ldots, q_n; t; a_1, a_2, \ldots, a_n) + a_{n+1}.$$

Дифференцируя функцию S, являющуюся полным интегралом уравнения Якоби, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Но из уравнения Якоби, принимая во внимание, что $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$, имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q;\ p;\ t);$$

кроме того, согласно определению импульса, $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$; поэтому

$$\frac{dS}{dt} = -H^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i,$$

а так как $H^* = -L + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$, то получим

$$\frac{dS}{dt} = L,$$

т. е. то же, что и для производной по времени от действия по Гамильтону. Так как производные по времени от действия по Гамильтону и от главной функции S в уравнении Якоби равны, то эти функции совпадают с точностью до аддитивной постоянной.

6. Замечание о характере экстремума действия по Гамильтону. В принципе Гамильтона сравниваются движения за некоторый промежуток времени $t_1 - t_0$ по прямому пути AB и по окольным путям, проходящим через те же фиксированные точки A и B (см. п. 2, рис. 90); при этом для движения по прямому пути действие S имеет экстремум.

Остановимся иа двух связанных друг с другом вопросах: 1) будет ли при произвольном выборе точек A и B прямой путь единственным; 2) каким является характер экстремума действия (минимум, максимум) при движении по прямому пути. Наглядное представление о возможных ответах на эти вопросы дает следующий простой пример. Рассмотрим материальную точку, движущуюся по гладкой сфере радиуса R; пусть никакие активные силы иа точку не действуют. Тогда оиа будет двигаться по геодезической линии (см. ч. I, § 38, п. 9), т. е. по дуге большого круга, с численно постоянной скоростью v_0. При этом, очевидно, $L = T = \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$ и $S = S_0 = \frac{mv_0^2}{2}(t_1 - t_0)$.

Если взять на сфере две произвольные точки A и B (рис. 91), то через них пройдет два прямых пути: AB ($\overset{\frown}{AB} < \pi R$) и AB_0B ($\overset{\frown}{AB_0B} > \pi R$). Исключение представляет случай, когда точка B совпадает с B_0, т. е. с точкой, диаметрально противоположной точке A; в этом случае через точки A и B_0 проходит множество бесконечно близких друг к другу прямых путей (меридианы). Такие две точки A и B_0, через которые проходит множество бесконечно близких друг к другу прямых путей, называются сопряженными кинетическими фокусами.

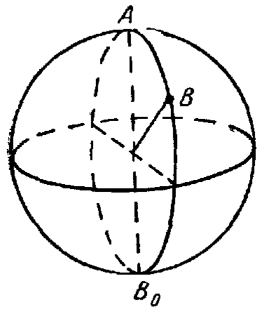


Рис. 91.

Тогда на основании данного примера можно сделать следующие выводы о характере экстремума действия, справедливые и в общем случае:

1) если прямой путь не проходит через кинетический фокус, сопряженный начальной точке (в нашем примере путь $\overset{\frown}{AB}$), то действие на нем имеет минимум (в нашем примере любой окольный путь будет больше дуги $\overset{\frown}{AB}$, и чтобы пройти его за тот же промежуток времени $t_1 - t_0$, точка должна двигаться со скоростью $v > v_0$; поэтому на любом окольном пути $S > S_0$);

2) если прямой путь проходит через кинетический фокус, сопряженный начальной точке (в нашем случае путь $\overset{\frown}{AB_0B}$), то действие на этом пути не имеет минимума (в нашем примере это следует из того, что при прямом пуги $\overset{\frown}{AB_0B}$ найдутся окольные пути, которые будут короче AB_0B; для этих путей будет $v < v_0$ и $S < S_0$).

Таким образом, точки A и B можно всегда выбрать настолько близкими друг к другу, что действие на прямом пути будет наименьшим (отсюда и термин «принцип наименьшего действия»); для этого надо лишь, чтобы путь AB не достигал кинетического фокуса, сопряженного точке A.

7. Принцип стациоиариого действия Мопертюи — Лагранжа. В 1744 г. Мопертюи опубликовал принцип, согласно которому *для действительного движения частицы интеграл от* $v\,ds$, *взятый по отрезку траектории между двумя какими-либо ее точками, есть минимум по сравнению с такими же интегралами, взятыми по отрезкам других кривых, проведенных между теми же точками.* Интеграл $\int v\,ds$, где v — скорость частицы, Мопертюи назвал «действием», а самый принцип — принципом наименьшего действия. К этому принципу вначале отнеслись очень недоверчиво, так как автор не дал для него никакого доказательства, но Эйлер понял важность открытия Мопертюи и стремился дать его принципу строгое математическое обоснование, что удалось только впоследствии Лагранжу, вследствие чего этот принцип и носит название принципа Мопертюи — Лагранжа.

Принцип Мопертюи — Лагранжа по своей конструкции похож на принцип Гамильтона и состоит в том, что действительное движение голономной консервативной системы между двумя конфигурациями A и B отличается тем свойством, что для него некоторая функция, выражаемая определенным интегралом и называемая действием по Лагранжу, имеет экстремум по сравнению со значением этой функции для других кинематически допустимых движений, совершаемых между теми же конфигурациями и с той же энергией. Таким образом, разница между принципами Гамильтона и Мопертюи — Лагранжа состоит в том, что, во-первых, действие по Лагранжу имеет вообще иной вид, чем действие по Гамильтону, а во-вторых, в принципе Мопертюи—Лагранжа сравниваются движения с одной и той же энергией, тогда как в принципе Гамильтона сравниваемые движения совершаются за один и тот же промежуток времени.

Возьмем выражение действия по Гамильтону для динамической консервативной системы между двумя конфигурациями A и B, причем положим, что начальная конфигурация A соответствует моменту $t=0$, а конфигурация B — моменту $t=t_1$; при этом момент t_1 здесь не является фиксированным, так как система, двигаясь по окольным путям с постоянной энергией, будет приходить в конфигурацию B в разные моменты времени (индекс 1 здесь указывает лишь то, что переменная величина t_1 означает момент прохода системы в конфигурацию B). Тогда будем иметь

$$S=\int_0^{t_1} L\,dt=\int_0^{t_1}(T+U)\,dt.$$

Кроме того, так как система по условию консервативна, имеет место интеграл энергии

$$T=U+h.$$

Подставляя выражение U из интеграла энергии в выражение S, получим

$$S=\int_0^{t_1} 2T\,dt-ht_1.$$

Функция

$$W=\int_0^{t_1} 2T\,dt=\int_0^{t_1}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2\,dt \tag{21}$$

называется действием по Лагранжу и является всегда положительной и ограниченной только снизу. В результате находим

$$S=W-ht_1 \quad \text{или} \quad W=S+ht_1. \tag{22}$$

Поскольку верхний предел интеграла t_1, как было указано, является переменным, то, обозначая его через t, можем переписать равенство (22) в виде

$$W=S+ht. \tag{22'}$$

Полученная формула показывает, что функция W совпадает с характеристической функцией уравнения Якоби (см. § 22, п. 4).

Далее, на сравниваемые движения налагается условие, чтобы эти движения совершались с одной и той же энергией h. Но, как это вытекает из интеграла энергии, кинетическая энергия T, а потому и скорости точек системы зависят от U, т. е. зависят от положения системы в данный момент. Поэтому время, в течение которого система переходит из A в B, зависит от пути и им определяется. Следовательно, времена перехода системы из конфигурации A в B по различным путям различны и зависят от этих путей, т. е., как было указано, предел t_1 в интеграле (21) является переменным. Поэтому при переходе от одного пути к другому должны варьироваться не только координаты и скорости (как в случае принципа Гамильтона), но и время, т. е. в случае принципа Мопертюи — Лагранжа вариация должна быть полной. Если мы будем интерпретировать движение системы в виде движения изображающей точки в пространстве n измерений (где n есть число координат системы), то принцип Мопертюи — Лагранжа будет формулироваться следующим образом: *действительное движение голономной консервативной системы между двумя заданными конфигурациями A и B отличается от кинематически возможных движений, совершаемых между теми же конфигурациями и с той же полной энергией тем, что для действительного движения полная вариация действия по Лагранжу равна нулю*; иными словами, для действительного движения действие по Лагранжу имеет стационарное значение. Математически это означает, что для действительного движения

$$\Delta\int_0^{t_1} 2T\,dt\equiv\Delta W=0, \tag{23}$$

где, как уже было сказано, вариация берется полная.

Действие по Лагранжу, так же как и действие по Гамильтону, имеет на прямом пути минимум (по сравнению с его значениями на окольных путях), если прямой путь не достигает сопряженного начальной точке кинетического фокуса (см. п. 6).

8. Вывод принципа Мопертюи — Лагранжа из уравнений движения и уравнений движения из принципа Мопертюи — Лагранжа. Найдем сначала выражение ΔW, исходя из равенства (22). Получим, учитывая, что $h=\text{const}$,

$$\Delta W=\Delta S+h\,\Delta t_1,$$

где t_1 — переменный момент прихода системы в конечную конфигурацию B.

Преобразуем правую часть, используя формулу (3) из п. 1; будем иметь $\Delta S = \delta S + \dot{S}\,\Delta t$. Но, согласно равенству (20), $\dot{S} = L$. Следовательно,

$$\Delta W = \delta S + (L + h)\,\Delta t_1.$$

Так как принцип Мопертюи — Лагранжа имеет место для консервативной системы, то $L = T + U$, а $h = T - U$, в результате находим

$$\Delta W = \delta S + 2T\,\Delta t_1. \qquad (24)$$

Теперь вычислим δS, учитывая опять равенство $L = T + U$; получим

$$\delta S = \int_0^{t_1} \delta L\,dt = \int_0^{t_1} (\delta T + \delta U)\,dt =$$

$$= \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\delta q_i\,dt + \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\delta \dot{q}_i\,dt. \qquad (25)$$

Преобразуем второй член правой части, интегрируя по частям; учитывая равенство (2) из п. 1, будем иметь

$$\int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\delta \dot{q}_i\,dt = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right]_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt.$$

В результате равенство (25) примет вид

$$\delta S = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\right]\delta q_i\,dt + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right]_0^{t_1}. \qquad (26)$$

Заметим, что в последнем члене полученного выражения $[\delta q_i]_{t=0} = 0$, так как все движения начинаются из конфигурации A в один и тот же момент времени $t_0 = 0$. Но $[\delta q_i]_{t=t_1} \neq 0$, так в конфигурацию B система, двигаясь по разным окольным путям, будет приходить в *разные* моменты времени t_1, а в случае изохронного варьирования вариация берется при одном и том же фиксированном значении t_1 (если, например, этим фиксированным значением будет момент прихода системы в конфигурацию B при движении по окольному пути 1, то при движении по пути 2, система в тот же момент в положение B не придет, следовательно, для всех окольных путей $[\delta q_i]_{t=t_1} \neq 0$). Перейдем поэтому в последнем члене правой части равенства (26) от δq_i к Δq_i. По формуле (3) из п. 1 имеем $\delta q_i = \Delta q_i - \dot{q}\,\Delta t$; следовательно,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right]_0^{t_1} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\Delta q_i\right]_0^{t_1} - \left[\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i\,\Delta t\right]_0^{t_1}. \qquad (27)$$

Но $[\Delta q_i]_{t=0} = 0$ и $[\Delta q_i]_{t=t_1} = 0$; последний результат следует из того, что здесь время варьируется, а в моменты t_1, какими бы они ни были, система по условию приходит в одну и ту же конфигурацию B. Кроме того, для консервативной системы T является однородной функцией второй степени от скоростей и $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i = 2T$. В результате равенство (27) дает

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right]_0^{t_1} = -2T\,\Delta t_1.$$

Тогда равенство (26) примет вид

$$\delta S = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\right]\delta q_i\,dt - 2T\,\Delta t_1.$$

Подставляя это значение δS в формулу (24), получим окончательно следующее выражение для полной вариации действия по Лагранжу:

$$\Delta W = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\right]\delta q_i\,dt. \qquad (28)$$

Уравнения движения голономной консервативной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (29)$$

Следовательно, при действительном движении такой системы будет

$$\Delta W = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \int_0^{t_1} 2T\,dt = 0, \qquad (30)$$

и мы приходим к принципу стационарного действия Мопертюи — Лагранжа.

Если теперь принцип Мопертюи — Лагранжа принять за исходный, то из него можно получить уравнения движения голономной консервативной системы. В самом деле, повторяя все проделанные выкладки, мы снова придем к соотношению (28). Но, согласно принципу Мопертюи — Лагранжа, для истинного движения должно быть $\Delta W = 0$, а так как интервал времени $t_1 - t_0$ произволен и вариации между собой независимы, то из равенства нулю интеграла, стоящего в правой части соотношения (28), следуют уравнения движения системы (29).

9. Различные формы выражения принципа Мопертюи — Лагранжа. Принцип Мопертюи — Лагранжа, как мы видели, состоит в том, что для действительного движения голономной консервативной системы между двумя данными конфигурациями действие по Лагранжу имеет экстремум по сравнению с кинематически допустимыми движениями между теми же конфигурациями при одной и той же энергии. В зависимости от выражения действия W этот принцип может быть выражен в различных формах.

а) *Форма Мопертюи.* Выше мы имели выражение действия в форме Лагранжа:

$$W=\int_0^{t_1} 2T\,dt=\int_0^{t_1}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2\,dt,$$

где N есть число точек системы. Так как $v_i\,dt=ds_i$, где ds_i есть элемент дуги траектории точки системы с номером i, то

$$v_i^2\,dt=v_i\,ds_i$$

и, следовательно,

$$W=\int_A^B\sum_{i=1}^{N} m_i v_i\,ds_i, \tag{31}$$

причем интегрирование совершается по дугам траекторий точек системы от конфигурации A до B. Формула (31) дает выражение действия в форме Мопертюи.

б) *Форма Якоби.* Выражение действия в форме Якоби отличается тем, что в нем при помощи интеграла энергии исключается время. Имеем

$$2T=\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2=\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2;$$

кроме того, интеграл энергии дает

$$2T=2(U+h). \tag{32}$$

Следовательно,

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,ds_i^2}{dt^2}=2(U+h),$$

откуда

$$dt=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} m_i\,ds_i^2}}{\sqrt{2(U+h)}}. \tag{33}$$

Подставляя значения $2T$ и dt, даваемые равенствами (32) и (33), в выражение W в форме Лагранжа, получим

$$W=\int_0^{t_1} 2T\,dt=\int_A^B\sqrt{2(U+h)}\cdot\sqrt{\sum m_i\,ds_i^2}. \tag{34}$$

Здесь так же, как и в формуле (31), интегрирование совершается по дугам траекторий от конфигурации A до B. Формула (34) дает выражение действия в форме Якоби; это выражение имеет геометрический характер, так как время и скорости в нем исключены.

Если мы введем независимые координаты и выразим $x_1, x_2, \ldots, x_{3N}$ в функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,ds_i^2=\sum_{i=1}^{3N} m_i\,dx_i^2=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,dq_i\,dq_j,$$

и выражение действия в форме Якоби приобретает вид

$$W=\int_A^B\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,dq_i\,dq_j}. \tag{34'}$$

В частном случае, когда внешние силы на систему не действуют, $U=\text{const}$, и поэтому на основании формул (34) и (34′) мы можем выразить действие W, отбрасывая постоянный множитель, в виде

$$W=\int_A^B\sqrt{\sum_{i=1}^{N} m_i\,ds_i^2}=\int_A^B\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,dq_i\,dq_j}.$$

Интерпретируя движение системы как движение точки в пространстве n измерений, для которого элемент дуги (фундаментальная метрическая форма) имеет выражение

$$d\sigma^2=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,dq_i\,dq_j,$$

можем написать

$$W=\int_A^B d\sigma. \tag{35}$$

Таким образом, задача об определении движения голономной системы по инерции сводится к нахождению минимума интеграла (35), т. е. к задаче геодезических линий. Принцип стационарного действия в этом случае может быть формулирован так: *голономная система по инерции движется так, что точка, изображающая систему в соответствующем пространстве n измерений, движется по геодезической линии этого пространства.*

К задаче геодезических линий можно свести определение движения голономной системы и в том случае, когда она движется в потенциальном силовом поле, определяемом силовой функцией U. Действительно, так как U зависит только от координат q, то

$$2(U+h)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,dq_i\,dq_j=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\,dq_i\,dq_j,$$

где $b_{ij}=2(U+h)a_{ij}$; поэтому

$$W=\int_A^B\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\,dq_i\,dq_j}=\int_A^B d\sigma,$$

где в данном случае

$$d\sigma^2=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\,dq_i\,dq_j. \tag{36}$$

Таким образом, движение голономной системы под действием потенциальных сил всегда можно рассматривать как движение по инерции в пространстве Римана, метрика которого определяется фундаментальной метрической формой (36); согласно принципу стационарного действия движение происходит по геодезической линии этого пространства. Эта идея лежит в основе общей теории относительности А. Эйнштейна.

10. Пример. Для уяснения принципиальной разницы между принципом Гамильтона и принципом Мопертюи — Лагранжа рассмотрим применение обоих этих принципов к определению движения материальной точки вдоль гладкой поверхности по инерции. В этом случае $U=\text{const}$; интеграл энергии дает

$$\frac{1}{2}mv^2=\text{const},$$

следовательно, $v=\text{const}$.

Согласно принципу Гамильтона для действительного движения действие по Гамильтону имеет стационарное значение по сравнению с движениями между теми же положениями A и B, совершающимися в одно и то же время t, т. е.

$$\delta\int_0^t (T+U)\,dt=0.$$

Так как для рассматриваемого движения действие по Гамильтону S будет

$$S=\int_0^t\left(\frac{1}{2}mv^2+C\right)dt=\frac{1}{2}mv^2t+Ct,$$

то для действительного движения (так как $\delta t=0$) имеем

$$\delta S=t\delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=0,$$

откуда $\delta(v^2)=0$, следовательно, $v=v_{\min}$. Таким образом, из всех кинематически возможных движений точки между положениями A и B, совершающихся в одно и то же время t (но с различными скоростями), действительным будет то, для которого $v=v_{\min}$, а следовательно, и $vt=s=v_{\min}$, т. е. движение по кратчайшему пути или, иначе говоря, по геодезической линии.

Согласно принципу стационарного действия Мопертюи — Лагранжа для действительного движения действие по Лагранжу имеет наименьшее значение по сравнению с движениями между теми же положениями A и B, совершающимися с одной и той же энергией, т. е.

$$\Delta\int_0^t 2T\,dt=0.$$

Для рассматриваемого движения действие по Лагранжу W будет

$$W=\int_0^t mv^2\,dt=mv^2t,$$

для действительного движения имеем

$$\Delta W=mv^2\,\Delta t=0$$

$\left(\text{ибо энергия } h=\frac{1}{2}mv^2\right.$, а следовательно, и скорости v для сравниваемых движений одни и те же, и поэтому $\left.\Delta v=0\right)$, откуда $\Delta t=0$. Таким образом, из всех возможных движений точки, совершающихся между положениями A и B с одной и той же скоростью (но в различное время), действительным будет то, которое удовлетворяет условию $\Delta t=0$, т. е. $t=t_{\min}$ следовательно, действительным движением будет то, которое совершается в кратчайшее время или, так как $vt=s$, по кратчайшему пути, т. е. по геодезической линии.

§ 27. Канонические преобразования

1. Вывод канонических уравнениий из принципа Гамильтона. Согласно принципу стационарного действия Гамильтона для действительного движения системы между двумя конфигурациями имеем

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt=0,$$

где $L|q,\dot{q};t$. Действие по Гамильтону можно представить через функцию H^* в виде [см. § 26, формула (14)]

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left(-H^*+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)dt,$$

или, выражая функцию $H^*(q, \dot{q}, t)$ в канонических переменных и учитывая, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(-H + \sum_i p_i \dot{q}_i\right) dt. \qquad (1)$$

Так как для действительного движения

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(-H + \sum_i p_i \dot{q}_i\right) dt = 0, \qquad (2)$$

то, развертывая вариацию в левой части, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i\right) dt = 0.$$

Преобразуя последний член левой части, будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \delta \dot{q}_i \, dt = [p_i \delta q_i]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q_i \, dt = -\int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q_i \, dt$$

вследствие того, что $[\delta q_i]_{t=0} = 0$ и $[\delta q_i]_{t_1} = 0$. В результате находим

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{p}_i\right)\delta q_i + \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} + \dot{q}_i\right)\delta p_i\right] dt = 0. \qquad (3)$$

Коэффициенты при δp_i в левой части равенства (3) обращаются в нули в силу соотношений (11) из § 21. Тогда, поскольку интервал интегрирования $t_1 - t_0$ произволен и вариации δq_i независимы, то коэффициенты при них также должны равняться нулю; поэтому окончательно будет

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

В результате мы получили каноническую систему уравнений движения. Отсюда вытекает, что выражение принципа Гамильтона в виде (2) эквивалентно канонической системе уравнений (4).

2. Канонические преобразования. Каноническими преобразованиями называются такие преобразования переменных q и p, при которых канонические уравнения движения сохраняют свою форму, т. е. переходят тоже в канонические уравнения, но вообще с какой-то

другой функцией Гамильтона $\overline{H}$. Введем вместо переменных q_i и p_i новые независимые переменные Q_i и P_i, полагая

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t), \\ P_i &= P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

При этом предполагается, что соотношения (5) разрешимы относительно q_i, p_i, т. е. что из них можно найти

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n; P_1, P_2, \ldots, P_n; t), \\ p_i &= p_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n; P_1, P_2, \ldots, P_n; t) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5')$$

Так как каноническая форма уравнений (4) непосредственно вытекает из выражения принципа Гамильтона (2), то для сохранения канонической формы уравнений после преобразования (5) необходимо, чтобы принцип Гамильтона в новых переменных Q и P сохранил свое выражение, т. е. чтобы было

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(-\overline{H} + \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i\right) dt = 0, \qquad (6)$$

где $\overline{H}(Q, P; t)$ есть некоторая функция новых переменных Q и P, являющаяся для них функцией Гамильтона. Время здесь при варьировании считается фиксированным, как и в выражении (2).

Нетрудно убедиться, что соотношение (6) будет выполняться, если подынтегральные выражения в равенствах (2) и (6) будут различаться на производную по времени от произвольной функции старых и новых переменных $V(p, q, P, Q; t)$, т. е. если будет

$$-H(q, p; t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = -\overline{H}(Q, P; t) + \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \frac{dV}{dt}. \qquad (7)$$

В самом деле,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dV}{dt} dt = [V]_{t=t_1} - [V]_{t=t_0}.$$

Поэтому, какова бы ни была функция V, вариация этого интеграла будет равна нулю, так как при $t = t_0$ и $t = t_1$ функция V имеет фиксированные значения и $\delta[V]_{t=t_0} = \delta[V]_{t=t_1} = 0$. Но поскольку для старых переменных имеет место соотношение (2), то при наличии равенства (7) будет выполняться и соотношение (6).

Покажем теперь, что, задавая функцию V произвольно, можно однозначно определить преобразования (5). Заметим предварительно, что поскольку старые и новые переменные связаны соотношениями (5), из которых, по сделанным предположениям, любые две группы переменных могут быть выражены через две другие (например, p, Q через q, P и т. д.), то функция V, являющаяся функцией старых и новых переменных, может иметь один из следующих видов:

$$V_1(q, Q; t), \quad V_2(p, Q; t), \quad V_3(q, P; t), \quad V_4(p, P; t).$$

Рассмотрим сначала случай, когда $V = V_1(q, Q; t)$. Умножая обе части равенства (7) на dt и определяя из него величину dV_1, получим

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\,dQ_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\,dq_i + (H - \overline{H})\,dt = dV_1(q, Q; t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial Q_i}\,dQ_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial q_i}\,dq_i + \frac{\partial V_1}{\partial t}\,dt. \qquad (8)$$

Поскольку все переменные считаются независимыми, то, сравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в правой и левой частях равенства (8), получим

$$P_i = \frac{\partial V_1}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (9')$$

$$p_i = -\frac{\partial V_1}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (9'')$$

$$\overline{H} = H - \frac{\partial V_1}{\partial t}. \qquad (9''')$$

Формулы (9) дают возможность найти выражения новых переменных Q и P через старые q и p при каноническом преобразовании или, другими словами, найти такое точечное преобразование координат $2n$-мерного фазового пространства $(q, p) \to (Q, P)$, при котором каноническая система уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

переходит также в каноническую систему

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Это преобразование, как видно из формул (9), зависит от выбора произвольной функции $V_1(q, Q; t)$, которая называется *производящей функцией*.

Чтобы найти выражения переменных Q и P через q и p, нужно сначала из уравнений (9″), т. е. уравнений

$$p_i = -\frac{\partial V_1(q, Q; t)}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

определить $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ в функции аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$; t. После этого, подставив найденные выражения Q в уравнения (9′), т. е. в уравнения

$$P_i = \frac{\partial V_1(q, Q; t)}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

определяем из них $P_1, P_2, \ldots, P_n$ в функции тех же аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$; t. Наконец, равенство (9‴) позволяет найти новую функцию Гамильтона $\overline{H}$.

3. Другие формы канонических преобразований. Найдем теперь формулы, определяющие канонические преобразования при других видах производящей функции. Для этого воспользуемся равенством (8)

$$\sum_i P_i\,dQ_i - \sum_i p_i\,dq_i + (H - \overline{H})\,dt = dV_1(q, Q; t). \qquad (8)$$

Преобразуем член $\sum_i p_i\,dq_i$, учитывая, что

$$\sum_i p_i\,dq_i = d\sum_i p_i q_i - \sum_i q_i\,dp_i. \qquad (10)$$

Подставляя выражение (10) в равенство (8) и перенеся полный дифференциал в правую часть, получим

$$\sum_i P_i\,dQ_i + \sum_i q_i\,dp_i + (H - \overline{H})\,dt = d\left[V_1(q, Q; t) + \sum_i p_i q_i\right].$$

В члене, заключенном справа в квадратные скобки, будем считать все q_i выраженными через p_i, Q_i посредством соотношений (5), (5′) и введем обозначение

$$\left[V_1(q, Q; t) + \sum_i p_i q_i\right]_{q \to (p, Q)} = V_2(p, Q; t),$$

где V_2 — новая производящая функция. Тогда будем иметь

$$\sum_i P_i\,dQ_i + \sum_i q_i\,dp_i + (H - \overline{H})\,dt = dV_2(p, Q; t),$$

откуда путем сравнения коэффициентов при одинаковых дифференциалах получаются формулы, определяющие каноническое преобразование, а именно

$$\left.\begin{aligned} P_i = \frac{\partial V_2}{\partial Q_i}, \quad q_i = \frac{\partial V_2}{\partial p_i}, \\ \overline{H} = H - \frac{\partial V_2}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (11)$$

Для определения новых координат Q и P из второй группы уравнений (11) определяем $Q|q, p, t$ и вставляем в уравнения первой группы, откуда определяем $P|q, p, t$. Преобразования (11) представляют собой иную форму канонических преобразований, отличную от преобразования (9).

Для получения третьей формы канонических преобразований преобразуем $\sum_i P_i\,dQ_i$, представив ее в виде

$$\sum_i P_i\,dQ_i = d\sum_i P_iQ_i - \sum_i Q_i\,dP_i. \tag{12}$$

Подставляя выражение (12) в равенство (8), получим

$$-\sum_i Q_i\,dP_i - \sum_i p_i\,dq_i + (H-\overline{H})\,dt = \\ = d\left[V_1(q, Q; t) - \sum_i Q_iP_i\right] = dV_3(q, P; t). \tag{13}$$

При этом опять предположено, что в правой части все Q_l выражены через q_i, P_l. Сравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в равенстве (13), получим третью форму канонических преобразований

$$\left.\begin{aligned} &Q_l = -\frac{\partial V_3}{\partial P_l}, \qquad p_l = -\frac{\partial V_3}{\partial q_l}, \\ &\overline{H} = H - \frac{\partial V_3}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Эта форма может быть получена из формы (11) простой перестановкой старых и новых переменных и поэтому не является новой.

Если сделать преобразование первого и второго членов левой части равенства (8), представив их в виде

$$\sum_i P_i\,dQ_i = d\sum_i P_iQ_i - \sum_i Q_i\,dP_i; \qquad \sum_i p_i\,dq_i = d\sum_i p_iq_i - \sum_i q_i\,dp_i,$$

то, подставляя эти выражения в равенство (8), получим четвертую форму канонических преобразований. Подстановка дает

$$-\sum_i Q_i\,dP_i + \sum_i q_i\,dp_i + (H-\overline{H})\,dt = \\ = d\left[V_1(q, Q; t) - \sum_i P_iQ_i + \sum_i p_iq_i\right], \tag{15}$$

откуда получим

$$\left.\begin{aligned} &Q_l = -\frac{\partial V_4}{\partial P_l}, \qquad q_l = \frac{\partial V_4}{\partial p_l}, \\ &\overline{H} = H - \frac{\partial V_4}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (l = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

где

$$V_4(p, P; t) = V_1(q, Q; t) - \sum_i P_iQ_i + \sum_i p_iq_i,$$

причем в правой части все q_l и Q_l считаются выраженными через p_i, P_l.

Итак, в зависимости от выбора производящей функции, мы получаем вышеуказанные четыре формы канонических преобразований.

3. Пример. Рассмотрим движение материальной точки под действием центральной силы в плоскости Oxy (точка O — центр силы). Беря в качестве обобщенных координат декартовы, т. е. полагая $q_1 = x$, $q_2 = y$, получим выражения для кинетической и потенциальной энергий

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad V = F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Отсюда $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$ и функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right). \tag{а}$$

Для осуществления перехода к новым (полярным) координатам рассмотрим производящую функцию

$$V_3 = -\left(P_1\sqrt{x^2+y^2} + P_2 \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

Тогда из первой группы уравнений (14) находим

$$Q_1 = -\frac{\partial V_3}{\partial P_1} = \sqrt{x^2+y^2} = r; \qquad Q_2 = -\frac{\partial V_3}{\partial P_2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi, \tag{б}$$

где r и φ — полярные координаты.

Из второй группы уравнений (14) получим

$$p_x = -\frac{\partial V_3}{\partial x} = P_1\frac{x}{r} - P_2\frac{y}{r^2}; \qquad p_y = -\frac{\partial V_3}{\partial y} = P_1\frac{y}{r} + P_2\frac{x}{r^2}. \tag{в}$$

Отсюда, умножая обе части первого равенства на x, а второго на y и складывая полученные выражения почленно, найдем, заменив p_x и p_y их значениями $m\dot{x}$, $m\dot{y}$:

$$m(x\dot{x} + y\dot{y}) = \frac{P_1}{r}(x^2+y^2) \quad \text{или} \quad mr\dot{r} = P_1r$$

откуда

$$P_1 = m\dot{r}. \tag{г}$$

Далее, умножая обе части первого из равенств (в) на $-y$, а второго на x и складывая, будем иметь

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = P_2,$$

а из выражения для Q_2 в равенствах (б) находим

$$\dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

Следовательно,

$$P_2 = mr^2\dot{\varphi}. \tag{д}$$

Равенства (б), (г), (д) и дают значения новых канонических переменных в полярных координатах (см. пример в § 21, п. 4).

Поскольку производящая функция V_3 в данном случае явно от времени не зависит, то, согласно последнему из равенств (14), $\overline{H}=H$. Поэтому, подставляя в формулу (а) значения p_x, p_y из равенств (в), найдем функцию Гамильтона для новых переменных в виде

$$\overline{H}=\frac{1}{2m}\left(P_1^2+\frac{P_2^2}{r^2}\right)+F(r). \qquad (e)$$

Вторая из новых координат, т. е. $Q_2=\varphi$, оказалась циклической. Следовательно, имеем сразу первый интеграл

$$P_2=mr^2\dot{\varphi}=\text{const}.$$

Кроме того, поскольку $\overline{H}$ явно от t не зависит, здесь еще имеет место интеграл энергии (см. пример в § 21, п. 4).

Рассмотренный пример показывает, как путем канонического преобразования можно среди новых координат получить циклические [в старых координатах x, y, как видно из выражения (а), ни одна из координат циклической не являлась].

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ТЕОРИЯ УДАРА

§ 28. Теория удара материальной точки

1. Основные понятия и определения. Теорема об изменении количества движения материальной точки имеет в дифференциальной форме вид

$$d(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\,dt. \qquad (1)$$

Проинтегрируем обе части уравнения (1) в интервале от $t=0$ до $t=\tau$, предполагая, что сила $\boldsymbol{F}$ может быть представлена как функция времени; получим

$$m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\int_0^\tau \boldsymbol{F}\,dt. \qquad (2)$$

Левая часть равенства (2) представляет собой приращение количества движения, а правая — импульс силы $\boldsymbol{F}$ за промежуток времени τ. Во всех предыдущих главах мы имели дело только с такими случаями, когда количество движения получало конечное приращение лишь за конечный промежуток времени; иными словами, количество движения всегда представлялось непрерывной функцией от времени. Сущность явления удара заключается в том, что при ударе происходит конечное изменение скорости $\boldsymbol{v}$, а следовательно, и количества движения $m\boldsymbol{v}$ за весьма малый промежуток времени, практически измеряемый тысячными и меньшими долями секунды.

Обозначая среднее значение ударной силы $\boldsymbol{F}$ в интервале очень малого промежутка времени τ через $\boldsymbol{F}^*$, получим из равенства (2) (по теореме о среднем значении)

$$m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{F}^*\tau. \qquad (3)$$

Равенство (3) показывает, что при малом τ приращение количества движения будет иметь конечную величину, только в том случае, если F^* очень велико $\left(\text{порядка } \frac{1}{\tau}\right)$, что действительно и наблюдается во время удара. Измерять ударные силы непосредственно неудобно, ибо они достигают очень больших величин и к тому же во время удара не остаются постоянными. Поскольку приращение количества движения остается величиной конечной, постольку, как это следует из равенств (2) и (3), гораздо удобнее при всех измерениях и расчетах оперировать не с ударными силами, а с их импульсами. Будем в дальнейшем ударный импульс обозначать через $\boldsymbol{S}$, так что

$$\boldsymbol{S}=\int_0^\tau \boldsymbol{F}\,dt. \tag{4}$$

Следовательно, равенство (2) перепишется в виде

$$m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{S}. \tag{5}$$

В излагаемой ниже общей теории удара время удара τ считается величиной бесконечно малой.

Силы $\boldsymbol{F}$, которые, действуя в течение бесконечно малого промежутка времени τ, сообщают точке конечное изменение скорости, будем называть *ударными* силами. В дальнейшем будем отличать ударные силы от конечных сил, действием которых за время удара τ можно пренебрегать. В самом деле, из равенства (3) видно, что при конечной величине $\boldsymbol{F}^*$ правая часть будет бесконечно малой величиной порядка τ, а следовательно, и левая часть, т. е. приращение количества движения, вызываемое конечными силами $\boldsymbol{F}$, будет также бесконечно мало.

2. Перемещения точки за время удара. Докажем, что перемещение точки за время удара будет бесконечно мало. Заметив, что

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

где $\boldsymbol{r}$ есть радиус-вектор, определяющий положение рассматриваемой точки относительно некоторой системы отсчета, умножим обе части равенства (5) на dt и проинтегрируем в интервале от нуля до τ; получим

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0\tau+\frac{1}{m}\int_0^\tau \boldsymbol{S}\,dt,$$

откуда

$$\Delta\boldsymbol{r}\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{v}_0\tau+\frac{1}{m}\boldsymbol{S}^*\tau.$$

Здесь $\boldsymbol{S}^*$ есть среднее значение ударного импульса за время τ. Учитывая, что $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{S}^*$ суть величины конечные, а τ бесконечно мало, приходим к выводу, что за время удара перемещение $\Delta\boldsymbol{r}$ точки также бесконечно мало.

3. Основное уравнение теории удара (теорема об изменении количества движения точки при ударе). Обозначим приращение количества движения $m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0$, которое может быть названо «приобретенным количеством движения», через $\Delta m\boldsymbol{v}$; тогда из равенства (5) найдем

$$\Delta m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{S}. \tag{6}$$

Этот результат можно сформулировать так: *количество движения, приобретенное точкой за время удара, равно ударному импульсу.* Так как в теории удара мы отказались от рассмотрения ускорений, которые весьма велики, и поскольку мы можем пренебрегать перемещениями при ударе (см. п. 3), постольку уравнение (6), аналогичное уравнению Ньютона $m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}$, является основным уравнением теории удара, с помощью которого можно сразу определить искомое изменение скорости точки по заданному ударному импульсу, или наоборот. Заметим, что это уравнение является конечным, а не дифференциальным уравнением; поэтому задачи теории удара точки и системы материальных точек в механике сводятся обычно к решению системы конечных уравнений.

4. Теорема об изменении момента количества движения точки при ударе. Умножив обе части равенства (6) векторно слева на радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, получим $\boldsymbol{r}\times\Delta(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{S}$ или

$$\Delta(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{S}, \tag{7}$$

потому что

$$\boldsymbol{r}\times\Delta(m\boldsymbol{v})=\Delta(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})-(\Delta\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\Delta(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}),$$

ибо с точностью до членов первой степени малости $\Delta\boldsymbol{r}=0$ (см. п. 2). Следовательно, приращение за время удара момента количества движения точки относительно некоторого центра равно моменту ударного импульса относительно того же центра.

5. Принцип Даламбера. Перенося в уравнении (5) все члены в одну сторону, получим

$$\boldsymbol{S}+(m\boldsymbol{v}_0-m\boldsymbol{v})=0, \tag{8}$$

или

$$\boldsymbol{S}+(-\Delta m\boldsymbol{v})=0. \tag{8$'$}$$

Выражение в круглых скобках в двух последних формулах представляет собой «потерянное количество движения», которое можно также назвать «ударным импульсом силы инерции». Если, кроме того, на точку наложены связи, то необходимо учесть еще ударные импульсы реакций. Таким образом, получим

$$\boldsymbol{S}^a+\boldsymbol{S}^N+(-\Delta m\boldsymbol{v})=0, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{S}^a$ и $\boldsymbol{S}^N$ — соответственно ударные импульсы активных ударных сил и ударных реакций связей. Таким образом, за время удара активные и пассивные ударные импульсы, действующие на точку, могут быть уравновешены ударным импульсом силы инерции — $\Delta m\boldsymbol{v}$. Это есть формулировка принципа Даламбера в теории удара точки.

6. Упругий и неупругий удары точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления. Рассмотрим случай, когда точка массы m, движущаяся со скоростью $\boldsymbol{v}$, встречает на своем пути неподвижную поверхность (рис. 92). Благодаря мгновенному наложению связи, что создает ударный импульс реакции, точка испытывает удар и мгновенно изменяет свою скорость.

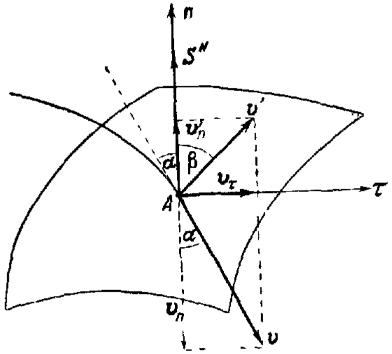


Рис. 92.

Обозначим скорость точки в конце удара через $\boldsymbol{v}'$. На основании уравнения (6) получим

$$m\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}^N. \tag{10}$$

Разложим скорости $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ по направлениям нормали и касательной к поверхности в точке удара A (берем ту касательную к поверхности, которая лежит в одной плоскости с вектором $\boldsymbol{v}$ и нормалью). Тогда

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{v}_\tau, \quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_n' + \boldsymbol{v}_\tau'.$$

Будем предполагать связь идеальной, следовательно, ударный импульс реакции будет направлен по нормали, и поэтому составляющая скорости по направлению касательной к поверхности не изменится за время удара, так что

$$\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v}_\tau'. \tag{11}$$

В самом деле, проектируя обе части равенства (10) на направление касательной τ, получим

$$mv_\tau' - mv_\tau = 0,$$

откуда следует справедливость равенства (11).

Рассмотрим три возможных случая удара:

1) $\boldsymbol{v}_n' = 0$. Этот случай называют абсолютно неупругим ударом точки о связь, и саму связь называют абсолютно неупругой. Здесь происходит полная потеря нормальной составляющей скорости.

2) $\boldsymbol{v}_n' = -\boldsymbol{v}_n$. Этот случай называют абсолютно упругим ударом точки о связь и саму связь — абсолютно упругой. Здесь нормальная составляющая скорости не изменяется по численной величине, а только меняет свое направление на противоположное.

3) $\boldsymbol{v}_n' = -k\boldsymbol{v}_n$, где $0 < k < 1$. Этот случай называют несовершенно упругим ударом и саму связь — несовершенно упругой. Здесь имеет место изменение (частичная потеря) нормальной составляющей скорости по численной величине.

Все эти три случая можно объединить одним равенством

$$\boldsymbol{v}_n' = -k\boldsymbol{v}_n,$$

где для 1-го случая $k = 0$, для 2-го случая $k = 1$ и для 3-го $0 < k < 1$, так что вообще

$$\boldsymbol{v}_n' = -k\boldsymbol{v}_n \qquad (0 \leqslant k \leqslant 1). \tag{12}$$

Величина k, равная отношению модулей нормальных составляющих скорости точки в конце и в начале удара, носит название коэффициента восстановления (коэффициента удара) и характеризует природу (упругость, пластичность) ударяющих тел. Знание этого коэффициента, введенного Ньютоном, необходимо для исследования явлений удара.

Обозначая через α и β углы, образованные нормалью с $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$, т. е. углы падения и отражения (см. рис. 92), получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_\tau}{v_n}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_\tau}{v_n'}.$$

Отсюда, согласно равенству (12), найдем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{v_n'}{v_n} = k, \tag{13}$$

т. е. коэффициент восстановления есть отношение тангенса угла падения к тангенсу угла отражения. При абсолютно неупругом ударе получим $\beta = \frac{\pi}{2}$, при абсолютно упругом ударе $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\alpha = \beta$ и при несовершенно упругом ударе $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$, $\alpha < \beta$.

7. Опытное определение коэффициента восстановления. Упругий шарик, падающий свободно на упругую горизонтальную неподвижную плоскость с высоты h, ударившись о плоскость, подскочит затем над ней на некоторую высоту h'. Имея эти данные (h и h'), легко найти значение k, соответствующее материалу ударяющихся тел. Согласно формулам Галилея имеем (оставляя для скоростей обозначения предыдущего пункта)

$$v = \sqrt{2gh}, \quad v' = \sqrt{2gh'};$$

тогда

$$k = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h'}{h}}. \tag{14}$$

В идеальном случае абсолютно упругих тел получим $h' = h$, а для абсолютно неупругого тела $h' = 0$; для несовершенно упругих тел

тел $0 < h' < h$. Например, средние значения коэффициента k при $v \approx 3$ *м/сек* таковы: для стали и пробки $k = \frac{5}{9}$, для слоновой кости $k = \frac{8}{9}$, для стекла $k = \frac{15}{16}$, для дерева $k = \frac{1}{2}$. Значение скорости v, при которой происходил удар, необходимо указать, ибо вообще величина коэффициента k также зависит от v.

8. Изменение кинетической энергии точки при ударе (теорема Карно). Докажем теорему Карно, позволяющую определить изменение кинетической энергии в тех случаях, когда точка испытывает удар благодаря тому, что на нее мгновенно накладывается или с нее мгновенно снимается *абсолютно неупругая* идеальная связь. Это значит, что связь, наложенная во время удара, будет продолжать существовать и после удара, а связь, снятая во время удара, будет отсутствовать и после удара. Так, например, в задаче, рассмотренной в п. 6, мы имели, что при абсолютно неупругой связи нормальная составляющая скорости точки после удара была равна нулю, т. е. точка после удара продолжала свое движение согласно со связью. Иными словами, доказываемая теорема относится к случаю абсолютно неупругого удара.

Указанные два случая отличаются один от другого, но для обоих случаев будет справедлива формула (10):

$$m\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}^N. \tag{10}$$

1-й случай: *мгновенное наложение связей*. Умножим обе части равенства (10) скалярно на скорость $\boldsymbol{v}'$ точки в конце удара; получим

$$mv'^2 - m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{S}^N \cdot \boldsymbol{v}'.$$

Так как перемещение точки после удара согласно со связями, наложенными во время удара, и связи идеальны, то скалярное произведение $\boldsymbol{S}^N \cdot \boldsymbol{v}'$ равно нулю. Поэтому по сокращении на m из предыдущей формулы найдем такое вспомогательное соотношение:

$$v'^2 - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' = 0. \tag{15}$$

Определим теперь искомое изменение кинетической энергии при мгновенном наложении связей на движущуюся точку; оно равно

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v'^2 - v^2\right). \tag{16}$$

Разность квадратов, входящих в правую часть равенства (16), можно преобразовать, вычтя из нее удвоенную левую часть равенства (15), равную нулю; получим

$$v'^2 - v^2 = v'^2 - v^2 - 2v'^2 + 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' = -\left(v'^2 - 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' + v^2\right) = \\ = -(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})^2.$$

Тогда

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')^2. \tag{17}$$

Этот результат можно сформулировать так: *кинетическая энергия, потерянная точкой при мгновенном наложении на нее абсолютно неупругой связи, равна кинетической энергии, которую имела бы точка, двигаясь с потерянной скоростью*; при этом под «потерянной скоростью» подразумевается разность $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$.

2-й случай: *мгновенное снятие связей*. Умножим обе части равенства (10) скалярно на скорость $\boldsymbol{v}$ точки в начале удара; получим вместо равенства (15) такое вспомогательное соотношение

$$\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v} - v^2 = 0, \tag{18}$$

так как теперь обращается в нуль скалярное произведение $\boldsymbol{S}^N \cdot \boldsymbol{v}$, потому что со связями согласно перемещение точки не после удара, когда связи оказываются снятыми, а перемещение до удара. Разность квадратов скоростей в формуле (16) преобразуется таким же образом:

$$v'^2 - v^2 = v'^2 - v^2 - 2\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v} + 2v^2 = v^2 - 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' + v'^2 = (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})^2.$$

Поэтому

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v' - v)^2, \tag{19}$$

что можно сформулировать так: *кинетическая энергия, приобретенная точкой при мгновенном снятии связей, равна той кинетической энергии, которую имела бы точка, двигаясь с приобретенной скоростью.*

§ 29. Теория удара системы материальных точек

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе. Разделим все ударные импульсы, действующие на систему, состоящую из N материальных точек, на внутренние и внешние по тем же соображениям, какие были приведены в случае подразделения обыкновенных сил; тогда, согласно равенству (6), для каждой точки с массой m_ν будет справедливо равенство

$$\Delta(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \boldsymbol{S}_\nu^e + \boldsymbol{S}_\nu^i, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{S}_\nu^e$ и $\boldsymbol{S}_\nu^i$ суть внешние и внутренние ударные импульсы, действующие на точку с массой m_ν. Составив подобные уравнения для всех точек системы и сложив их, получим

$$\sum_\nu \Delta(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \sum_\nu \boldsymbol{S}_\nu^e + \sum_\nu \boldsymbol{S}_\nu^i$$

или

$$\Delta \boldsymbol{Q} \equiv \Delta \sum_{\nu} m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu} = \sum_{\nu} \boldsymbol{S}_{\nu}^{e} + \sum_{\nu} \boldsymbol{S}_{\nu}^{i},$$

где через $\boldsymbol{Q} \equiv \sum_{\nu} m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}$ мы обозначили количество движения системы. Замечая, что $\sum_{\nu} \boldsymbol{S}_{\nu}^{i} = 0$ на основании третьего закона Ньютона, приходим к такому результату:

$$\Delta \boldsymbol{Q} = M \Delta \boldsymbol{v}_{C} = \sum_{\nu} \boldsymbol{S}_{\nu}^{e}, \tag{2}$$

т. е. количество движения, приобретенное системой за время удара, равно сумме всех внешних ударных импульсов, приложенных к системе.

Если на систему внешние ударные импульсы не действуют, то количество движения системы $\boldsymbol{Q}$ и скорость центра масс $\boldsymbol{v}_C$ при ударе не изменяются.

2. Теорема об изменении кинетического момента системы при ударе. Умножим обе части равенства (1) векторно слева на радиус-вектор $\boldsymbol{r}_{\nu}$ точки с массой m_{ν}, проведенный из некоторого центра O, и просуммируем это равенство по индексу ν для всех точек системы; получим

$$\sum_{\nu} [\boldsymbol{r}_{\nu} \times \Delta (m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu})] = \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu} \times \boldsymbol{S}_{\nu}^{e}) + \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu} \times \boldsymbol{S}_{\nu}^{i}). \tag{3}$$

На основании рассуждений, изложенных в § 28 п. 4, левую часть равенства (3) можно преобразовать к виду

$$\sum_{\nu} [\boldsymbol{r}_{\nu} \times \Delta (m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu})] = \Delta \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu} \times m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu});$$

кроме того, вторая сумма в правой части равенства (3) равна нулю, ибо для каждого внутреннего ударного импульса найдется равный и противоположно направленный импульс; поэтому вместо равенства (3) будем иметь следующее:

$$\Delta \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu} \times m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}) = \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu} \times \boldsymbol{S}_{\nu}^{e}),$$

или

$$\Delta \boldsymbol{G}_{O} = \sum_{\nu} \operatorname{mom}_{O} (\boldsymbol{S}_{\nu}^{e}), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{G}_{O} \equiv \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu} \times m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu})$ есть кинетический момент системы относительно некоторого выбранного центра O, а $\sum_{\nu} \operatorname{mom}_{O} (\boldsymbol{S}_{\nu}^{e}) \equiv \sum_{\nu} (\boldsymbol{r}_{\nu} \times \boldsymbol{S}_{\nu}^{e})$ есть сумма моментов относительно того же центра всех внешних ударных импульсов. Таким образом, уравнение (4) можно сформулировать так: *изменение за время удара кинетического момента системы, взятого относительно некоторого центра, равно сумме моментов, взятых относительно того же центра, всех внешних ударных импульсов.*

Заметим, что поскольку перемещениями точек системы за время удара мы пренебрегаем, то доказанная теорема справедлива относительно любого центра O, связанного или не связанного с системой, и, в частности, относительно центра масс системы.

3. Изменение кинетической энергии системы при ударе (теорема Карно). Докажем теорему Карно для системы, предполагая, как и в § 28, п. 8, что удар происходит или от мгновенного наложения, или от мгновенного снятия абсолютно неупругих идеальных связей. В обоих случаях для каждой точки системы с массой m_{ν} будет справедлива формула (10) § 28, т. е.

$$m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}' - m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu} = \boldsymbol{S}_{\nu}^{N}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{v}_{\nu}$ и $\boldsymbol{v}_{\nu}'$ суть скорости соответствующей точки в начале и в конце удара, а $\boldsymbol{S}_{\nu}^{N}$ — ударный импульс реакций, приложенных к этой же точке.

Найдем изменение кинетической энергии в следующих двух случаях:

1-й случай: связи мгновенно налагаются. Умножая обе части равенства (5) на $\boldsymbol{v}_{\nu}'$ и произведя суммирование по индексу ν для всех точек системы, получим

$$\sum_{\nu} m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}'^{2} - \sum_{\nu} m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}' \cdot \boldsymbol{v}_{\nu} = 0, \tag{6}$$

ибо $\sum_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}' \cdot \boldsymbol{S}_{\nu}^{N} = 0$ (см. § 28, п. 8). Изменение кинетической энергии $T' - T$ за время удара будет

$$T' - T \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}'^{2} - \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}^{2}. \tag{7}$$

Так как выражение, стоящее в левой части формулы (6), равно нулю, то его можно вычесть из правой части равенства (7); тогда, приведя подобные члены, найдем

$$T' - T = -\frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} (\boldsymbol{v}_{\nu} - \boldsymbol{v}_{\nu}')^{2}. \tag{8}$$

Так как правая часть равенства (8) отрицательна, то отсюда следует, что кинетическая энергия T' после удара меньше кинетической энергии T до удара. В результате из равенства (8) находим

$$T - T' = \sum_{\nu} \frac{1}{2} m_{\nu} (\boldsymbol{v}_{\nu} - \boldsymbol{v}_{\nu}')^{2}, \tag{9}$$

т. е. *кинетическая энергия, потерянная системой при мгновенном наложении на нее абсолютно неупругих связей, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее точки двигались с потерянными скоростями.*

2-й случай: мгновенное снятие связей. В этом случае мы будем умножать обе части равенства (5) скалярно не на вектор $\boldsymbol{v}'_\nu$, а на вектор $\boldsymbol{v}_\nu$, ибо теперь $\sum\limits_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{S}_\nu^N = 0$ (см. § 28, п. 8); проведя затем такие же рассуждения, как и в предыдущем случае, получим следующее выражение для изменения кинетической энергии системы при ударе:

$$T' - T = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu (\boldsymbol{v}'_\nu - \boldsymbol{v}_\nu)^2. \qquad (10)$$

Правая часть формулы (10) положительна, следовательно, $T' > T$, и мы приходим к такому выводу: *кинетическая энергия, приобретенная системой при внезапном снятии связей, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее точки двигались с потерянными скоростями.*

В качестве иллюстрации для этого второго случая можно привести явление взрыва гранаты; можно утверждать, что явлению взрыва сопутствует увеличение кинетической энергии[1]).

4. Принцип Даламбера. Разделяя ударные импульсы, действующие на каждую точку системы с массой m_ν, на активные и пассивные, получим, согласно формуле (9), следующее:

$$\boldsymbol{S}_\nu^a + \boldsymbol{S}_\nu^N + (-\Delta m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \qquad (11)$$

т. е. во время удара активные и пассивные ударные импульсы, действующие на систему материальных точек, могут быть уравновешены инерционными ударными импульсами. Это положение представляет собой принцип Даламбера для системы в теории удара.

5. Уравнение Даламбера — Лагранжа в теории удара. Умножим скалярно обе части равенства (11) на виртуальное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ и просуммируем по индексу ν для всех точек системы, принимая во внимание, что для идеальных связей

$$\sum_\nu \boldsymbol{S}_\nu^N \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0.$$

Получим

$$\sum_\nu (\boldsymbol{S}_\nu^a - \Delta m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \qquad (12)$$

Итак, сумма элементарных работ активных ударных импульсов и ударных импульсов сил инерции равна нулю при всяком виртуальном перемещении системы.

[1]) См. также «Беседы о механике» В. Л. Кирпичёва.

5. Уравнения Лагранжа 2-го рода для удара. Пользуясь символикой, оговоренной в § 1, п. 3, выразим уравнение Даламбера — Лагранжа (12) через проекции всех векторных величин на оси координат. Получим

$$\sum_{\nu=1}^{3N} (S_{x\nu} - \Delta m_\nu \dot{x}_\nu)\,\delta x_\nu = 0, \qquad (13)$$

где N есть число точек системы. Пусть на систему наложены голономные связи вида

$$f_\varkappa(x;\ t) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

и пусть эти связи имеют место как до, так и после удара; тогда число независимых координат системы будет $3N - k = n$. Выразим координаты точек системы x в функциях n независимых переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$, которые будут обобщенными координатами системы; тогда

$$x \,|\, q_1, q_2, \ldots, q_n;\ t.$$

Преобразуем уравнение (13) к этим координатам. Имеем

$$\delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\,\delta q_i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3N);$$

подставляя эти выражения в уравнение (13), получим, меняя порядок суммирования:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{3N} S_{x\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} - \Delta \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0. \qquad (14)$$

Но

$$\sum_{\nu=1}^{3N} S_{x\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} = P_i, \qquad (15)$$

где P_i есть обобщенный ударный импульс, отнесенный к координате q_i; далее, так как [см. § 8, п. 1, уравнение (6)]

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_i},$$

то

$$\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \qquad (16)$$

где T есть кинетическая энергия системы.

Подставляя выражения (15) и (16) в уравнение (14), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P_i - \Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i = 0. \tag{17}$$

Так как вариации δq независимы, то из уравнения (17) имеем

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Уравнения (18) представляют собой *уравнения Лагранжа 2-го рода для удара* и выражают то обстоятельство, что за время удара конечные приращения обобщенных импульсов равны соответствующим обобщенным ударным импульсам.

Заметим, что уравнения (18), как и все полученные ранее уравнения рассматриваемой теории удара, являются алгебраическими, а не дифференциальными. Составляются они, как обычные уравнения Лагранжа; при этом обобщенные ударные импульсы P_i можно находить так же, как и обобщенные силы Q_i, т. е. вычисляя элементарную «работу» ударных импульсов на виртуальных перемещениях системы и определяя в полученном выражении коэффициенты при вариациях соответствующих обобщенных координат.

Простой пример такого расчета дан ниже в § 30, п. 2.

§ 30. Теория удара твердых тел

1. Изменение при ударе угловой скорости твердого тела, имеющего неподвижную точку. Пусть имеем твердое тело, одна точка O которого закреплена неподвижно. Примем точку O за начало осей координат, которые направим вдоль главных осей инерции тела и воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы в форме (4) § 29. Тогда, используя формулы для проекций кинетического момента $\boldsymbol{G}_O$ на главные оси инерции тела относительно центра O [см. § 15, п. 1, формулы (3)], получим из равенства (4) § 29 следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} A(p_1 - p_0) &= \sum_{\nu} \operatorname{mom}_x \boldsymbol{S}_{\nu}^a,\\ B(q_1 - q_0) &= \sum_{\nu} \operatorname{mom}_y \boldsymbol{S}_{\nu}^a,\\ C(r_1 - r_0) &= \sum_{\nu} \operatorname{mom}_z \boldsymbol{S}_{\nu}^a, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где A, B, C суть главные моменты инерции; p_1, q_1, r_1 и p_0, q_0, r_0 — проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в конце и в начале удара; в правых частях уравнений (1) стоят моменты относительно осей координат ударных импульсов активных сил, действующих на

твердое тело. В эти уравнения не входят моменты импульсов ударных реакций, ибо эти ударные импульсы приложены к началу координат, а потому их моменты относительно осей обращаются в нули.

2. Изменение при ударе угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Если твердое тело имеет неподвижную ось, которую примем, например, за ось z, и угловая скорость его вращения в начале удара есть ω_0, а в конце удара ω_1, то из равенства (1) получим

$$J_z(\omega_1 - \omega_0) = \sum \operatorname{mom}_z \boldsymbol{S}_{\nu}^a, \tag{2}$$

где J_z есть момент инерции твердого тела относительно оси вращения, а справа стоит сумма моментов ударных импульсов активных сил относительно той же оси. Моменты ударных импульсов реакций оси в равенство (2) не входят, так как эти моменты равны нулю.

Покажем, как этот же результат можно получить с помощью уравнений Лагранжа (18) § 29. Связи, наложенные на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, при ударе сохраняются, следовательно, указанные уравнения здесь применимы. Тело имеет одну степень свободы и за обобщенную координату можно принять угол поворота φ. Тогда уравнение Лагранжа имеет вид

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = P_{\varphi}. \tag{3}$$

Вычисляя величину T и ее производную, получим

$$T = \frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_z\dot{\varphi} = J_z\omega; \quad \Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_z(\omega_1 - \omega_0).$$

Далее, вычисляя элементарную «работу» приложенных импульсов $\boldsymbol{S}_{\nu}^a$, будем иметь

$$\delta A^S = \left[\sum_{\nu} \operatorname{mom}_z \boldsymbol{S}_{\nu}^a\right]\delta\varphi, \text{ откуда } P_{\varphi} = \sum_{\nu} \operatorname{mom}_z \boldsymbol{S}_{\nu}^a.$$

Подставляя все найденные величины в равенство (3), придем к уравнению (2).

3. Действие удара на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Центр удара. Пусть твердое тело может вращаться вокруг неподвижной оси, которую примем за ось z прямоугольной системы $Oxyz$, связанной с телом. Положение начала и двух других осей оставим пока произвольным. Если на это твердое тело подействовал ударный импульс активных сил $\boldsymbol{S}$, то он вызовет ударные импульсы реакций, проходящих через ось. Так как этот случай движения можно рассматривать как движение твердого тела, имеющего две неподвижные точки A и B, то ударные импульсы реакций оси можно свести к двум импульсам $\boldsymbol{S}_A$ и $\boldsymbol{S}_B$, приложенным в точках A и B, лежащих на оси (рис. 93). Воспользуемся теоремами об изменении количества движения и кинетического момента, выведенными в § 29, пп. 1 и 2. Обозначим проекции ударных импульсов реакций $\boldsymbol{S}_A$ и $\boldsymbol{S}_B$ через S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}, S_{Bz}, а приращение угловой скорости тела за время удара обозначим через $\Delta\omega$.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента дадут уравнения

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}_A + \boldsymbol{S}_B, \tag{4}$$

$$\Delta \boldsymbol{G} = \mathrm{mom}_O\, \boldsymbol{S} + \mathrm{mom}_O\, \boldsymbol{S}_A + \mathrm{mom}_O\, \boldsymbol{S}_B. \tag{5}$$

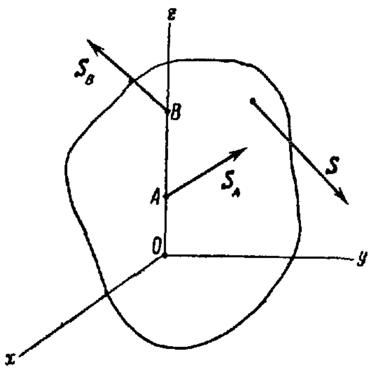


Рис. 93.

Так как $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, то

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \Delta \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \Delta \sum_\nu (m_\nu \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu) = \Delta\left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu\right) = \Delta(\boldsymbol{\omega} \times M\boldsymbol{r}_C) = \Delta\boldsymbol{\omega} \times M\boldsymbol{r}_C = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \Delta\omega \\ Mx_C & My_C & Mz_C \end{vmatrix}$$

Здесь M есть масса тела, а $\boldsymbol{r}_C(x_C, y_C, z_C)$ — радиус-вектор центра масс C; равенство $\Delta(\boldsymbol{\omega} \times M\boldsymbol{r}_C) = \Delta\boldsymbol{\omega} \times M\boldsymbol{r}_C$ следует из того, что при ударе величина $\Delta M\boldsymbol{r}_C$ бесконечно мала и ею можно пренебречь (см. § 28, п. 2).

Так как $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\omega}(J)$, то конечное приращение кинетического момента равно $\Delta\boldsymbol{G} = \Delta\boldsymbol{\omega}(J)$. Тогда из формул (1) § 15, п. 1, учитывая, что в данном случае $p = q = 0$, $r = \omega$, следует:

$$\begin{aligned} \Delta G_x &= \Delta p J_{xx} - \Delta q J_{xy} - \Delta r J_{xz} = -\Delta\omega\, J_{xz}, \\ \Delta G_y &= -\Delta p J_{yx} + \Delta q J_{yy} - \Delta r J_{yz} = -\Delta\omega\, J_{yz}, \\ \Delta G_z &= -\Delta p J_{zx} - \Delta q J_{zy} + \Delta r J_{zz} = +\Delta\omega\, J_{zz}. \end{aligned}$$

Тогда, проектируя обе части уравнений (4) и (5) на оси координат, получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta Q_x &\equiv -\Delta\omega\, My_C = S_x + S_{Ax} + S_{Bx}, \\ \Delta Q_y &\equiv +\Delta\omega\, Mx_C = S_y + S_{Ay} + S_{By}, \\ \Delta Q_z &\equiv \quad 0 \quad = S_z + S_{Az} + S_{Bz}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta G_x &\equiv -\Delta\omega\, J_{xz} = \mathrm{mom}_x\, \boldsymbol{S} + \mathrm{mom}_x\, \boldsymbol{S}_A + \mathrm{mom}_x\, \boldsymbol{S}_B, \\ \Delta G_y &\equiv -\Delta\omega\, J_{yz} = \mathrm{mom}_y\, \boldsymbol{S} + \mathrm{mom}_y\, \boldsymbol{S}_A + \mathrm{mom}_y\, \boldsymbol{S}_B, \\ \Delta G_z &\equiv +\Delta\omega\, J_{zz} = \mathrm{mom}_z\, \boldsymbol{S}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) можно определить $\Delta\omega$, S_{Ax}, S_{Bx}, S_{Ay}, S_{By} и сумму $S_{Az} + S_{Bz}$.

Найдем условия, при которых ударные импульсы реакций не возникают или, иначе говоря, удар не передается на ось. Для этого в уравнениях (6) и (7) надо положить

$$S_{Ax} = S_{Ay} = S_{Az} = S_{Bx} = S_{By} = S_{Bz} = 0.$$

Тогда уравнения (6) и (7) перейдут в следующие:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta\omega\, My_C &= S_x, \\ \Delta\omega\, Mx_C &= S_y, \\ 0 &= S_z; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} -\Delta\omega\, J_{xz} &= \mathrm{mom}_x\, \boldsymbol{S}, \\ -\Delta\omega\, J_{yz} &= \mathrm{mom}_y\, \boldsymbol{S}, \\ \Delta\omega\, J_{zz} &= \mathrm{mom}_z\, \boldsymbol{S}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Третье из уравнений (8) показывает, что приложенный ударный импульс $\boldsymbol{S}$ должен быть перпендикулярен к оси вращения Oz.

Пользуясь произволом в выборе начала и остальных осей подвижной системы, выберем начало в такой точке оси z, чтобы координатная плоскость Oxy прошла через импульс $\boldsymbol{S}$, а ось x направим параллельно $\boldsymbol{S}$ (рис. 94). Тогда $S_y = 0$.

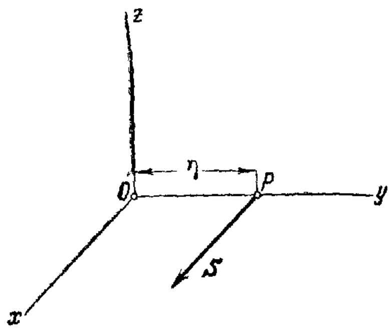


Рис. 94.

Обозначим координату точки пересечения линии действия импульса $\boldsymbol{S}$ с осью y через η; тогда уравнения (8) и (9) примут вид

$$\left.\begin{aligned} -\Delta\omega\, My_C &= S_x, \\ \Delta\omega\, Mx_C &= 0, \\ 0 &= S_z, \\ -\Delta\omega\, J_{xz} &= 0, \\ -\Delta\omega\, J_{yz} &= 0, \\ \Delta\omega\, J_{zz} &= -\eta S_x. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(в последнем уравнении знак минус стоит потому, что при положительной проекции S_x импульс $\boldsymbol{S}$ вращает тело по ходу часовой стрелки, т. е. при принятом правом направлении вращения изменение $\Delta\omega$ в данном случае будет отрицательно).

Из второго уравнения системы (10) следует, что центр масс C тела должен находиться в выбранной плоскости Oyz. Следовательно, приложенный ударный импульс $\boldsymbol{S}$ должен быть перпендикулярен к плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс те а. Условия $J_{xz} = J_{yz} = 0$ показывают, что ось вращения z должна быть главной осью инерции твердого тела для точки O.

Первое из уравнений (10) дает зависимость между проекцией ударного импульса активных сил $\boldsymbol{S}$ на ось x и приращением угловой скорости, а именно

$$S_x = -\Delta\omega M y_C.$$

Подставляя выражение S_x в последнее из уравнений (10), получим

$$\eta\,\Delta\omega M y_C = \Delta\omega\, J_{zz}.$$

Отсюда имеем расстояние линии действия ударного импульса от оси вращения:

$$\eta = \frac{J_{zz}}{M y_C}. \tag{11}$$

Итак, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то для того, чтобы ударный импульс, подействовавший на тело, не передавался на ось вращения, необходимо выполнение следующих условий:

1) Ось вращения должна быть главной осью инерции тела для одной из своих точек O (главная точка).

2) Приложенный ударный импульс (произвольный по величине) должен лежать в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через главную точку O.

3) Ударный импульс должен быть перпендикулярен к плоскости, проходящей через центр масс и ось вращения.

4) Точка пересечения P линии действия ударного импульса с этой (упомянутой в условии 3) плоскостью должна находиться с той же стороны от оси вращения, что и центр масс C, и отстоять от оси вращения на расстоянии η, которое определяется формулой (11). Определенная таким образом точка P называется *центром удара* относительно оси z.

Формула (11) **имеет** такой же вид, как и формула для приведенной длины физического маятника, который получится, если ось вращения z сделать горизонтальной. Отсюда следует, что центр удара может быть найден построением Гюйгенса для нахождения оси качания. В самом деле, обозначим через J_C момент инерции тела относительно оси, параллельной z и проходящей через центр масс C; тогда по теореме Гюйгенса

$$J_{zz} = J_C + M y_C^2 = M i_C^2 + M y_C^2,$$

где i_C есть радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс, и мы получим

$$\eta = \frac{J_{zz}}{M y_C} = \frac{M i_C^2 + M y_C^2}{M y_C} = \frac{i_C^2}{y_C} + y_C;$$

отсюда

$$(\eta - y_C)\, y_C = i_C^2,$$

и построение можно выполнить, основываясь на свойстве высоты в прямоугольном треугольнике (рис. 95). Определив для оси z главную точку O, проводим в плоскости, проходящей через центр масс C, ось y, перпендикулярную к оси z. Через C проводим ось Cz', параллельную z, и от точки D пересечения Cz' с осью y откладываем отрезок $DK = i_C$, т. е. равный радиусу инерции тела относительно оси Cz'. Соединяем точку O с K и проводим в точке K прямую $KP \perp OK$ до пересечения с осью y в точке P, которая и будет центром удара тела относительно оси z.

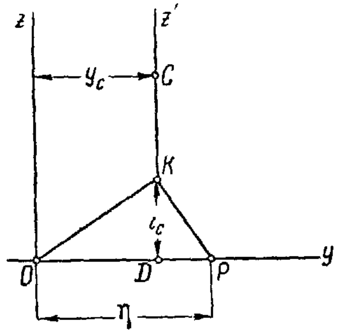


Рис. 95.

В частном случае, если центр масс находится на оси вращения, т. е. $x_C = y_C = 0$, формула (11) дает $\eta = \infty$, т. е. центра удара нет на конечном расстоянии от оси; поэтому все удары, действующие на тело, будут передаваться на ось вращения. Так как в этом случае левые части уравнений (6) обращаются в нуль, то ударный импульс $\boldsymbol{S}$ вызовет равный и противоположный ему суммарный импульс реакций $\boldsymbol{S}_A + \boldsymbol{S}_B$, т. е. удар полностью передается на ось. Это имеет место для уравновешенных вращающихся деталей машин. Все удары передаются полностью на опоры и действуют на них разрушительно.

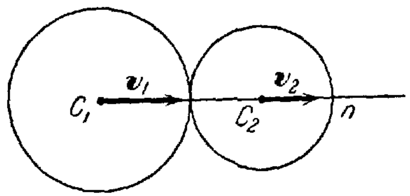


Рис. 96.

4. Прямой центральный удар двух тел (удар шаров). Рассмотрим удар двух движущихся поступательно твердых тел при следующих условиях (рис. 96): а) центры масс C_1 и C_2 тел лежат на общей нормали n к поверхностям тел в точке удара (такой удар называется центральным; в частности, центральным всегда будет удар двух любых шаров); б) скорости центров масс тел в начале удара направлены параллельно общей нормали к поверхностям тел в точке удара (такой удар называется прямым).

Выберем на нормали $C_1 n$ положительное направление от C_1 к C_2 и обозначим через v_1 и v_2 проекции на нормаль n скоростей центров масс тел в начале удара, а через v_1', v_2' — проекции тех же скоростей в конце удара. Массы тел пусть будут M_1 и M_2, а коэффициент восстановления k. Зная M_1, M_2, v_1, v_2 и k, найдем v_1', v_2' и действующий на тела при ударе ударный импульс S.

Если рассматривать оба тела как одну механическую систему, то поскольку внешние ударные импульсы на эту систему не действуют, количество движения в конце удара должно равняться количеству движения в начале удара. Отсюда имеем

$$M_1 v_1' + M_2 v_2' = M_1 v_1 + M_2 v_2. \tag{12}$$

Второе уравнение дает выражение для коэффициента восстановления, который будет равен модулю отношения разностей скоростей тел в конце и в начале удара, т. е.

$$k = \frac{|v_1' - v_2'|}{|v_1 - v_2|} = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}. \tag{13}$$

Последний результат следует из того, что до удара должно быть $v_1 > v_2$ (иначе удар не произойдет), а после удара будет $v_2' \geqslant v_1'$ в силу непроницаемости тел.

Решая систему уравнений (12), (13), найдем искомые скорости в конце удара v_1' и v_2'.

Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, можно найти, составив для одного из тел, например для первого, уравнение (2) § 29 в проекции на нормаль n. Получим, учитывая закон равенства действия и противодействия,

$$S_1 = M_1 (v_1' - v_1) \quad \text{и} \quad S_2 = -S_1, \tag{14}$$

где S_1 и S_2 — проекции импульсов на нормаль n.

Рассмотрим два частных случая:

1) Абсолютно неупругий удар ($k = 0$). В этом случае из уравнений (12), (13), (14) находим

$$\left.\begin{aligned} v_1' = v_2' &= \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}, \\ S_2 = -S_1 &= \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_1 - v_2). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Тела после удара движутся в этом случае с одной и той же скоростью v_1'.

2) Абсолютно упругий удар ($k = 1$). В этом случае уравнения (12), (13), (14) дают

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= v_1 - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(v_1 - v_2), \\ v_2' &= v_2 + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(v_1 - v_2), \\ S_2 = -S_1 &= \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_1 - v_2). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Интересно отметить, что при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом.

В частном случае, когда $M_1 = M_2$, из уравнений (16) находим $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$, т. е. тела одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

При решении этой задачи, как и предыдущих, мы не исследовали деформаций, возникающих в месте удара тел, а упругие свойства тел при ударе характеризовали одним эмпирическим коэффициентом k, что существенно упрощает все исследование.

Рассмотрение удара твердых тел с учетом их деформаций оказывается задачей гораздо более сложной. Решение ее для случая соударения двух упругих тел дано Г. Герцем.

5. **Примеры.** 1). *Баллистический маятник.* Для определения скорости пули или артиллерийского снаряда можно пользоваться баллистическим маятником (Robin, 1742 г.), который представляет собой подвешенный на горизонтальной оси ящик, наполненный мягким, но вязким веществом (например, песком или глиной), поглощающим энергию попадающего в него снаряда (рис. 97). Пусть снаряд с массой m летит со скоростью $\boldsymbol{v}$ и попадает в точку A, после чего маятник вследствие удара отклоняется на угол α. Если рассматривать снаряд и маятник как одну механическую систему, то действующими на нее внешними ударными импульсами будут только ударные реакции оси O, момент которых относительно этой оси равен нулю. Следовательно, кинетический момент системы относительно той же оси за время удара не изменяется, т. е.

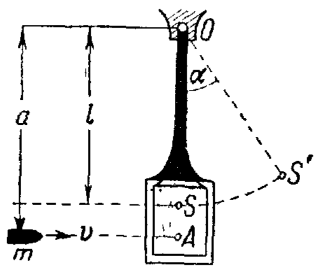


Рис. 97.

$$mva = (J_0 + ma^2)\,\omega, \tag{а}$$

где ω есть угловая скорость маятника в конце удара, а J_0 — момент инерции маятника относительно оси O. Из уравнения (а) имеем

$$v = \frac{J_0 + ma^2}{ma}\,\omega. \tag{б}$$

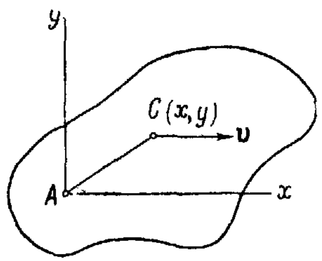


Рис. 98.

Для определения ω воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Обозначив массу маятника через M и расстояние его центра тяжести до оси O через l, получим

$$\frac{1}{2}(J_0 + ma^2)\,\omega^2 = g\,(Ml + ma)\,(1 - \cos\alpha); \tag{в}$$

из уравнения (в) по углу отклонения маятника α определяем ω, а затем из уравнения (б) находим скорость v.

2) *Внезапное закрепление.* Неизменяемая материальная плоская фигура движется в своей плоскости; скорость центра масс C равна $\boldsymbol{v}$; угловая скорость вращения относительно центра масс равна ω. Внезапно закрепляем точку A плоской фигуры; найти угловую скорость фигуры и импульсивную реакцию в точке A (рис. 98).

Возьмем начало координат в точке A и оси координат направим так, что *ось x будет параллельна скорости $\boldsymbol{v}$.* Пусть после удара (т. е. после закрепления точки A) угловая скорость фигуры будет ω_1; тогда

$$J_C(\omega_1-\omega)=\mathrm{mom}_C\,S_A=-xS_{Ay}+yS_{Ax}, \tag{a}$$

где S_A есть импульсивная реакция в точке A, а x, y — координаты точки C. Ударный импульс S_A определим из того соображения, что

$$S_A=\Delta Q,$$

где Q есть количество движения фигуры, равное, как известно, количеству движения центра масс, в котором сосредоточена масса всей системы, т. е.

$$\Delta Q=M\,\Delta v_C.$$

Так как после удара $v_C=\omega\times\overline{AC}$, а до удара $v_C=v$, то

$$\Delta v_C=\omega_1\times\overline{AC}-v;$$

отсюда

$$S_{Ax}=M(-y\omega_1-v),\quad S_{Ay}=Mx\omega_1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (a), получим

$$J_C(\omega_1-\omega)=-M\omega_1(x^2+y^2)-Mvy,$$

откуда

$$\omega_1=\frac{J_C\omega-Mvy}{J_C+M(x^2+y^2)}=\frac{J_C\omega-Mvy}{J_A}.$$

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

РАЗМЕРНОСТЬ И ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

§ 31. Измерение и размерность механических величин

1. Измерение. Результат сравнения какой-либо величины с другой, ей однородной и принятой за единицу сравнения, выраженный числом, называется измерением этой величины; величина, принятая за единицу сравнения, называется единицей меры, а число, получившееся от измерения, — численным значением измеренной величины. Обозначая измеряемую величину символом Q, единицу меры — через q и численное значение величины Q через $\varkappa$, имеем

$$Q=\varkappa q\quad\text{или}\quad \varkappa=\frac{Q}{q}.$$

Таким образом, численное значение какой-либо величины есть отвлеченное число, выражающее отношение этой величины к выбранной единице меры. Если за единицу меры взять другую величину q', причем $q'=nq$, то численное значение величины Q станет, очевидно, иным и равным

$$\varkappa'=\frac{Q}{q'}.$$

При этом, как легко видеть, величины $\varkappa'$ и $\varkappa$ связаны соотношением

$$\varkappa'=\frac{\varkappa}{n}. \tag{1}$$

Следовательно, новое численное значение равно прежнему, разделенному на число, равное отношению новой единицы меры к прежней.

2. Единицы меры. Для каждой физической величины за единицу меры может быть принята любая однородная ей величина, но ввиду того, что между различными физическими величинами существуют соотношения, устанавливаемые физическими законами или самим определением этих величин, достаточно установить единицы меры только для таких величин, которые являются между собой независимыми, т. е. не связаны между собой каким-либо соотношением; тогда единицы меры для остальных величин определятся через единицы меры этих независимых величин, которые называются *основными* единицами. Действительно, пусть какая-либо величина X зависит от других величин $Q, R, S, \ldots$; тогда она будет пропорциональна произведению различных степеней этих величин [1]), т. е.

$$X = kQ^{\alpha}R^{\beta}S^{\gamma} \ldots, \tag{2}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Но так как $Q = \varkappa q$, $R = \rho r$, $S = \sigma s$, где $\varkappa, \rho, \sigma, \ldots$ суть численные значения, $q, r, s, \ldots$ — единицы меры для величин $Q, R, S, \ldots$, то

$$X = (\varkappa^{\alpha}\rho^{\beta}\sigma^{\gamma} \ldots)\, kq^{\alpha}r^{\beta}s^{\gamma} \ldots \tag{3}$$

Полагая $k = 1$, получим, что численное значение величины X, т. е. ξ, будет $\xi = \varkappa^{\alpha}\rho^{\beta}\sigma^{\gamma} \ldots$, а единица меры для X, т. е. x, определится равенством

$$x = q^{\alpha}r^{\beta}s^{\gamma} \ldots \tag{4}$$

и будет, следовательно, выражаться через единицы меры для величин $Q, R, S, \ldots$. В более общем случае зависимость X от $Q, R, S, \ldots$ может быть выражена в виде многочлена, представляющего собой сумму членов типа (2), причем, очевидно, единица меры каждого члена должна быть та же, что и для величины X, т. е. этот многочлен должен быть однородным относительно основных единиц.

3. Механические величины. В механике встречаются величины трех видов: геометрические, кинематические и динамические (или кинетические).

Геометрической величиной называется величина, пропорциональная произведению нескольких длин, т. е. величина вида

$$Q_1 = kL_1L_2 \ldots L_n. \tag{5}$$

Если за единицу длины выбрать длину l, то будет

$$L_1 = \lambda_1 l, \quad L_2 = \lambda_2 l, \ \ldots, \ L_n = \lambda_n l;$$

тогда, полагая $k = 1$, получим

$$Q_1 = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n l^n. \tag{6}$$

Отсюда видно, что единицей меры для величины Q_1 будет

$$q_1 = l^n. \tag{7}$$

Таким образом, для геометрических величин основной единицей является единица длины l, все же остальные выражаются через l и

[1]) Справедливость этого утверждения можно доказать, исходя из того физического условия, что отношение любых двух численных значений данной производной величины не должно зависеть от выбора основных единиц меры.

имеют вид l^n, т. е. будут *производными* единицами; следовательно, установив единицу длины, мы тем самым устанавливаем единицы для всех геометрических величин. Тот факт, что единица меры для величины Q_1 определяется через единицу меры основной величины L (длины) формулой (7), выражается, согласно обозначению, введенному Максвеллом, символом

$$[Q_1] = L^n. \tag{8}$$

Выражение в правой части (8) называется *размерностью* величины Q_1, а самая формула (8) — *формулой размерности* [1]). Формулы размерности для геометрических величин будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
[\text{площадь}] &= L^2,\\
[\text{объем}] &= L^3,\\
[\text{статический момент длины}] &= L^2,\\
[\text{статический момент площади}] &= L^3,\\
[\text{статический момент объема}] &= L^4,\\
[\text{момент инерции длины}] &= L^3,\\
[\text{момент инерции площади}] &= L^4,\\
[\text{момент инерции объема}] &= L^5.
\end{aligned}$$

Кинематической величиной называется величина, которая зависит, кроме геометрических величин, еще от времени, т. е. имеет вид

$$Q_2 = kL^{\alpha}T^{\beta}, \tag{9}$$

где k есть коэффициент пропорциональности, L — длина, T — время, α и β — действительные (в задачах механики обычно целые) числа; в частном случае α может равняться нулю. Полагая, по предыдущему, $k = 1$, $L = \lambda l$, $T = \tau t$, где l и t суть выбранные единицы длины и времени, и принимая во внимание, что в классической механике длина и время считаются между собой независимыми, мы можем принять единицы l и t за основные и получим для кинематической величины выражение

$$Q_2 = \lambda^{\alpha}\tau^{\beta}l^{\alpha}t^{\beta}; \tag{10}$$

следовательно, для кинематической величины единицей меры будет $q_2 = l^{\alpha}t^{\beta}$, а формула размерности имеет вид

$$[Q_2] = L^{\alpha}T^{\beta}; \tag{11}$$

[1]) В формулах размерности принято символ производной (вторичной) величины заключать в квадратные скобки, а для основных величин скобок не ставить, полагая $[L] = L$.

в частности

$$[\text{скорость}] = LT^{-1},$$
$$[\text{ускорение}] = LT^{-2},$$
$$[\text{угловая скорость}] = T^{-1},$$
$$[\text{угловое ускорение}] = T^{-2},$$
$$[\text{момент скорости или секторная скорость}] = L^2T^{-1},$$
$$[\text{момент ускорения или секторное ускорение}] = L^2T^{-2}.$$

Если механическая величина помимо геометрических и кинематических величин зависит от массы, то она носит название *динамической* (или *кинетической*) и имеет вид

$$Q_3 = kL^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}, \tag{12}$$

где k есть коэффициент пропорциональности, L — длина, T — время, M — масса, α, β, γ — действительные числа, причем в частном случае α и β могут равняться нулю. Полагая, как и раньше, $k = 1$, $L = \lambda l$, $T = \tau t$, $M = \mu m$, где l, t, m суть выбранные единицы длины, времени и массы, и принимая во внимание, что в классической механике между длиной, временем и массой не существует никаких зависимостей (как, например, это имеет место в релятивной механике), мы можем принять единицы l, t, m за основные; тогда динамическая величина Q_3 примет вид

$$Q_3 = \lambda^{\alpha}\tau^{\beta}\mu^{\gamma}l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}. \tag{13}$$

Таким образом, для всех динамических величин единицы меры выразятся в основных единицах l, t, m в виде $q_3 = l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}$, а общая формула размерности для этих величин будет

$$[Q_3] = L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}. \tag{14}$$

Если, в частности, $\gamma = 0$, то величина Q_3 будет кинематической, а если $\gamma = 0$ и $\beta = 0$, то геометрической; если же $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то величина Q_3 называется *безразмерной* или *отвлеченной*.

Формулы размерности для различных динамических (кинетических) величин выразятся следующим образом:

$$[\text{сила}] = MLT^{-2},$$
$$[\text{момент силы}] = ML^2T^{-2},$$
$$[\text{работа, энергия}] = ML^2T^{-2},$$
$$[\text{мощность}] = ML^2T^{-3},$$
$$[\text{количество движения, импульс}] = MLT^{-1},$$
$$[\text{момент количества движения}] = ML^2T^{-1},$$
$$[\text{действие по Гамильтону и Лагранжу}] = ML^2T^{-1},$$
$$[\text{принуждение по Гауссу, } \mathfrak{Z}w] = ML^2T^{-4},$$
$$[\text{момент инерции}] = ML^2,$$
$$[\text{плотность}] = ML^{-3}.$$

4. Переход от одних единиц меры к другим для одной и той же системы. Из формулы (13) следует, что если за основные единицы меры принять какие-либо единицы длины, времени и массы l, t, m, то единица меры любой механической величины Q будет иметь вид

$$q = l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma},$$

а сама величина представится в виде

$$Q = \varkappa l^{\alpha}t^{\beta}m^{\gamma}, \tag{15}$$

где $\varkappa$ будет численным значением величины Q.

Совокупность величин, единицы которых принимаются за основные, называется *системой* основных единиц; сами же единицы основных величин могут быть выбраны произвольно. Пусть какая-нибудь механическая величина Q выражается в некоторых единицах системы (l, t, m) формулой (15); возьмем другие единицы той же системы:

$$l' = \frac{l}{n_l}, \quad t' = \frac{t}{n_t}, \quad m' = \frac{m}{n_m}; \tag{16}$$

тогда, подставляя в формулу (15) выражения l, m, t в новых единицах из (16), получим выражение Q в единицах l', t', m', а именно

$$Q = \varkappa\, n_l^{\alpha}\, n_t^{\beta}\, n_m^{\gamma}\, l'^{\alpha}\, t'^{\beta}\, m'^{\gamma}; \tag{17}$$

таким образом, численное значение величины Q в единицах (l', t', m') будет

$$\varkappa' = \varkappa\, n_l^{\alpha}\, n_t^{\beta}\, n_m^{\gamma}.$$

Число $n_l^{\alpha}n_t^{\beta}n_m^{\gamma}$, на которое нужно умножить численное значение какой-либо величины, выраженной в некоторых основных единицах, для того чтобы получить численное значение той же величины, выраженной в других единицах той же системы, называется *коэффициентом перехода*.

5. Теорема однородности. Пусть какая-нибудь механическая величина Q зависит от ряда других величин R_1, R_2, R_3, ..., которые выражены в единицах системы (l, t, m); тогда эта величина Q будет зависеть от некоторого числа длин L_1, L_2, L_3, ..., времен T_1, T_2, T_3, ... и масс M_1, M_2, M_3, ..., причем

$$L_i = \lambda_i l \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha); \qquad T_j = \tau_j t \quad (j = 1, 2, \ldots, \beta);$$
$$M_k = \mu_k m \quad (k = 1, 2, \ldots, \gamma),$$

где λ_i, τ_j, μ_k суть численные значения этих величин. Численное значение $\varkappa$ величины Q будет функцией λ_1, λ_2, λ_3, ..., τ_1, τ_2, τ_3, ..., μ_1, μ_2, μ_3, ..., т. е.

$$\varkappa = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots; \tau_1, \tau_2, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots). \tag{18}$$

Возьмем вместо единиц меры (l, t, m) другие единицы той же системы (l', t', m'), причем

$$l'=\frac{l}{n_l}, \quad t'=\frac{t}{n_t}, \quad m'=\frac{m}{n_m};$$

тогда при новых единицах (l', t', m') будем иметь

$$\lambda_i'=n_l\lambda_i, \quad \tau_j'=n_t\tau_j, \quad \mu_k'=n_m\mu_k \tag{19}$$

и

$$\varkappa'=\left(n_l^\alpha n_t^\beta n_m^\gamma\right)\varkappa. \tag{20}$$

Поскольку уравнение (18) должно иметь место при любых единицах меры (конечно, в пределах одной и той же системы) или, другими словами, уравнение (18) должно быть ковариантно при переходе от одних единиц меры к другим, то в единицах l', t', m'

$$\varkappa'=f\left(\lambda_1', \lambda_2', \ldots; \tau_1', \tau_2', \ldots; \mu_1', \mu_2', \ldots\right), \tag{21}$$

или, принимая во внимание (19) и (20),

$$n_l^\alpha n_t^\beta n_m^\gamma \varkappa=f\left(n_l\lambda_1, n_l\lambda_2, \ldots; n_t\tau_1, n_t\tau_2, \ldots; n_m\mu_1, n_m\mu_2, \ldots\right). \tag{22}$$

Так как равенство (22) имеет место при каких угодно n_l, n_t, n_m, то оно должно быть однородно относительно λ_i, τ_j и μ_k, т. е. всякое уравнение механики должно обладать тройной однородностью относительно численных значений основных величин данной системы; в этом и состоит теорема об однородности.

6. Системы основных единиц. До сих пор мы принимали за основные единицы системы единицы длины, времени и массы; такую систему единиц называют *абсолютной*. Термин «абсолютный» в данном случае имеет историческое значение и отражает собой то обстоятельство, что в конце 18-го столетия (во время Конвента) французские физики стремились для этих величин установить такую систему мер, которая была бы независима от всякого рода случайных причин, влияющих на изменение эталонов. Но, как известно, такая попытка оказалась неудачной, и в настоящее время «абсолютными» единицами длины и массы называются те, которые определяются соответствующими эталонами этих мер, хранящимися в Международной Палате мер и весов в Севре (Франция).

Абсолютная система основных единиц впервые была предложена Гауссом; основными единицами меры для этой системы были приняты: для длины — 1 *см*, для времени — 1 *сек* и для массы — 1 *г* (масса). Такая абсолютная система носит название CGS (т. е. сантиметр — грамм — секунда). В системе CGS единица силы будет производной единицей, а именно 1 дина = 1 *см сек*$^{-2}$ *г* (см. ч. I, § 14, п. 3). В настоящее время принята другая аналогичная система основных единиц — система СИ, в которой единицами являются для длины — 1 *м*, для времени — 1 *сек* и для массы — 1 *кг* (масса). Единицей силы в этой системе является сила, сообщающая массе в 1 *кг* ускорение в 1 *м/сек*^{2}; такая единица называется 1 *ньютон* (1 *н* = 1 *кгм/сек*^{2}).

Кроме абсолютной можно построить различные другие системы основных единиц, выбирая в качестве основных единиц единицы меры для трех каких-либо *независимых* между собой механических величин. Найдем условие, необходимое и достаточное для того, чтобы три механические величины Q_1, Q_2, Q_3 были между собой независимы. Пусть размерности этих величин в абсолютной системе будут

$$\left.\begin{aligned}[Q_1]&=L^{\alpha_1}T^{\beta_1}M^{\gamma_1},\\ [Q_2]&=L^{\alpha_2}T^{\beta_2}M^{\gamma_2},\\ [Q_3]&=L^{\alpha_3}T^{\beta_3}M^{\gamma_3}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Тогда единицы меры q_1, q_2, q_3 для этих величин выразятся через l, t, m в виде

$$\left.\begin{aligned}q_1&=n_1 l^{\alpha_1}t^{\beta_1}m^{\gamma_1},\\ q_2&=n_2 l^{\alpha_2}t^{\beta_2}m^{\gamma_2},\\ q_3&=n_3 l^{\alpha_3}t^{\beta_3}m^{\gamma_3},\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где n_1, n_2, n_3 — численные коэффициенты, которые соответствующим выбором q_1, q_2, q_3 можно всегда сделать равными единице. Если величины Q_1, Q_2, Q_3, а следовательно, и единицы их измерения q_1, q_2, q_3 между собой независимы, то из уравнений системы (24) можно определить l, t, m как функции q_1, q_2, q_3; для этого нужно, чтобы соответствующий определитель Якоби был отличен от нуля, т. е. чтобы

$$\frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(l, t, m)}=\begin{vmatrix}\alpha_1 l^{\alpha_1-1}t^{\beta_1}m^{\gamma_1}, & \beta_1 l^{\alpha_1}t^{\beta_1-1}m^{\gamma_1}, & \gamma_1 l^{\alpha_1}t^{\beta_1}m^{\gamma_1-1}\\ \alpha_2 l^{\alpha_2-1}t^{\beta_2}m^{\gamma_2}, & \beta_2 l^{\alpha_2}t^{\beta_2-1}m^{\gamma_2}, & \gamma_2 l^{\alpha_2}t^{\beta_2}m^{\gamma_2-1}\\ \alpha_3 l^{\alpha_3-1}t^{\beta_3}m^{\gamma_3}, & \beta_3 l^{\alpha_3}t^{\beta_3-1}m^{\gamma_3}, & \gamma_3 l^{\alpha_3}t^{\beta_3}m^{\gamma_3-1}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Умножая столбцы определителя последовательно на l, t, m, т. е. весь определитель на ltm, и деля строки определителя последовательно на $l^{\alpha_1}t^{\beta_1}m^{\gamma_1}$, $l^{\alpha_2}t^{\beta_2}m^{\gamma_2}$, $l^{\alpha_3}t^{\beta_3}m^{\gamma_3}$, т. е. весь определитель на $l^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}t^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}m^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$, получим условие независимости величин Q_1, Q_2, Q_3 в виде

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\neq 0. \tag{25}$$

Итак, для того чтобы три механические величины Q_1, Q_2 и Q_3 были между собой независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из показателей размерности этих величин, был отличен от нуля (причем размерность может считаться относительно любой системы основных единиц).

7. Переход от одной системы основных единиц к другой. Пусть в системе основных единиц l, t, m единицей меры какой-либо величины R является

$$r = l^a t^b m^c. \tag{26}$$

Чтобы найти единицу меры (или размерность) той же величины R в каких-то других основных единицах q_1, q_2, q_3, нужно из уравнений системы (24) выразить единицы l, t, m в новых основных единицах q_1, q_2, q_3 и подставить эти значения в равенство (26).

Допустим, что, разрешая систему (24), мы получаем

$$\left.\begin{aligned} l &= \nu_1\, q_1^{\xi_1} q_2^{\eta_1} q_3^{\zeta_1},\\ t &= \nu_2\, q_1^{\xi_2} q_2^{\eta_2} q_3^{\zeta_2},\\ m &= \nu_3\, q_1^{\xi_3} q_2^{\eta_3} q_3^{\zeta_3}. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя эти значения в (26), найдем, что единицей меры величины R в новой системе основных единиц будет

$$r' = \nu\, q_1^{a\xi_1+b\xi_2+c\xi_3}\, q_2^{a\eta_1+b\eta_2+c\eta_3}\, q_3^{a\zeta_1+b\zeta_2+c\zeta_3}. \tag{27}$$

При этом надлежащим выбором единиц можно всегда сделать $\nu = 1$.

В качестве примера возьмем за систему основных единиц единицы длины, времени и силы, т. е. l, t, f. Выражения этих новых основных единиц через единицы l, t, m будут

$$\left.\begin{aligned} l &= l t^0 m^0,\\ t &= l^0 t m^0,\\ f &= l t^{-2} m. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Такая система употребляется столь же часто, как и абсолютная, и называется *технической* или *практической* (см. ч. I, § 14, п. 3). Основные единицы этой системы независимы, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Разрешая уравнения (28) относительно l, t, m, получаем для перехода от абсолютной системы к технической соотношения

$$l = l, \quad t = t, \quad m = f t^2 l^{-1} \tag{29}$$

Таким образом, например, если единицей меры энергии E в абсолютной системе l, t, m является

$$e = l^2 t^{-2} m, \tag{30}$$

то в технической системе l, t, f этой единицей будет

$$e' = l^2 t^{-2} f t^2 l^{-1} = l f. \tag{31}$$

Рассмотрим теперь другой пример. Возьмем за основные единицы единицы скорости, ускорения и силы v, w, f. Выражения этих единиц через единицы l, t, m имеют вид

$$v = l t^{-1} m^0, \qquad w = l t^{-2} m^0, \qquad f = l t^{-2} m. \tag{32}$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то эти величины независимы, а следовательно, такая система основных единиц возможна. Формулы перехода от единиц измерения в абсолютной системе к единицам измерения в системе v, w, f найдутся из уравнений (32) в виде

$$l = \frac{v^2}{w}, \qquad t = \frac{v}{w}, \qquad m = \frac{f}{w}. \tag{33}$$

Подставляя, например, эти значения в равенство (30), найдем, что единицей измерения энергии в системе v, w, f будет

$$e'' = \frac{v^4 w^2 f}{w^2 v^2 w} = v^2 w^{-1} f.$$

8. Метод нулевых размерностей. Метод нулевых размерностей основан на теореме однородности (п. 5) и может с большим успехом применяться для определения характера зависимости какой-либо физической величины от других величин, ее обусловливающих. Посредством этого метода можно частично, а в некоторых случаях и вполне, установить закон, дающий связь между величинами с точностью до безразмерного (отвлеченного) коэффициента, который может быть определен или теоретически, или экспериментальным путем.

Пусть некоторая величина Q зависит от ряда других величин Q_1, Q_2, ..., Q_n и некоторых безразмерных величин $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., и пусть единицы меры для этих величин будут соответственно q и q_1, q_2, ..., q_n; тогда единица меры q будет зависеть от q_1, q_2, ..., q_n и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., т. е.

$$q = f(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots). \tag{34}$$

Выберем из величин q_1, q_2, ..., q_n три какие-либо независимые между собой величины, удовлетворяющие условию (25), например q_1, q_2, q_3, и примем их за основные единицы новой системы; тогда остальные величины q, q_4, q_5, ..., q_n будут производными в этой новой системе единиц и выразятся через основные единицы q_1, q_2, q_3. Пусть размерность величины Q в новой системе будет

$$\{Q\} = Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} Q_3^{\gamma}.$$

Принимая во внимание, что уравнение (34) должно обладать тройной однородностью относительно q_1, q_2, q_3 (п. 5) и заменяя в (34) q_1, q_2, ..., q_n отношениями этих величин к их единицам меры в новой системе q_1, q_2, q_3, будем иметь

$$q = q_1^{\alpha} q_2^{\beta} q_3^{\gamma} F(1,\ 1,\ 1,\ \mathring{q}_3,\ \mathring{q}_4,\ \ldots,\ \mathring{q}_n;\ \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \ldots), \tag{35}$$

где $\mathring{q}_1$ обозначает безразмерную величину, равную отношению q_i к ее единице меры, выраженной через q_1, q_2, q_3, причем, очевидно, $\mathring{q}_1 = \mathring{q}_2 = \mathring{q}_3 = 1$.

Таким путем, величина q (или Q) может быть представлена в виде произведения некоторых степеней величин q_1, q_2, q_3 (или Q_1, Q_2, Q_3) на безразмерный коэффициент F, зависящий от безразмерных аргументов, благодаря чему структура данной величины становится более определенной.

Этот метод точно так же применяется и в том случае, когда в ряде величин q_1, q_2, ..., q_n имеются только две, между собой независимые, или даже одна, которые можно выбрать за основные и через них выразить все остальные.

9. Примеры. 1) *Математический маятник.* Период колебания математического маятника может зависеть только от его длины l, массы m, ускорения силы тяжести g и начального угла отклонения φ_0, т. е.

$$T_м = f(l,\ m,\ g,\ \varphi_0).$$

Здесь φ_0 — величина безразмерная, а размерности остальных величин в абсолютной системе L, T, M будут

$$[l] = L, \quad [m] = M, \quad [g] = LT^{-2}.$$

Эти величины, как легко видеть, удовлетворяют условию (25) и, следовательно, между собой независимы. Возьмем за основные единицы новой системы l, m, g. Так как размерность $T_м$ в системе L, T, M есть

$$[T_м] = T,$$

то в системе l, m, g размерность $T_м$ будет

$$\{T_м\} = l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}},$$

следовательно,

$$T_м = \sqrt{\frac{l}{g}}\,F(1,\ 1,\ 1,\ \varphi_0) \quad \text{или} \quad T_м = F(\varphi_0)\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $F(\varphi_0)$ есть безразмерный коэффициент, который зависит от φ_0 и, как известно (см. ч. I, § 38, п. 5), равен $4K$. Для малых колебаний, учитывая из соображений симметрии, что $F(-\varphi_0) = F(\varphi_0)$, т. е. что $F(\varphi_0)$ — функция четная и считая ее при этом регулярной, можно положить

$$F(\varphi_0) = \alpha + \beta\varphi_0^2 + \gamma\varphi_0^4 + \ldots$$

Пренебрегая здесь членами с φ_0^2 и выше, получим $F(\varphi_0) \approx \alpha = \text{const}$; как известно, из решения соответствующей задачи $\alpha = 2\pi$.

2) *Движение вязкой жидкости в трубе круглого сечения.* При движении вязкой жидкости в ней возникают силы «внутреннего трения», т. е. силы, противодействующие относительному перемещению смежных слоев. Если взять в жидкости два соседних слоя, то эта сила, отнесенная к единице площади, будет, как показывает опыт, пропорциональна разности dv скоростей частиц жидкости в соседних слоях, отнесенной к расстоянию dn между слоями, т. е.

$$\tau = \mu\frac{dv}{dn}.$$

Коэффициент пропорциональности μ, зависящий от природы и состояния жидкости, называется *коэффициентом вязкости.* Размерность μ в абсолютной системе LTM определится из уравнения

$$L^{-1}T^{-2}M = [\mu]\frac{LT^{-1}}{L},$$

откуда

$$[\mu] = L^{-1}T^{-1}M.$$

Для жидкости, текущей по горизонтальной трубе круглого сечения, величина давления p в каком-нибудь сечении трубы зависит от диаметра трубы D, средней скорости V, плотности жидкости ρ и коэффициента вязкости μ, т. е.

$$p = f(D,\ V,\ \rho,\ \mu).$$

Размерности этих величин в абсолютной системе LTM будут

$$[D] = L, \quad [V] = LT^{-1}, \quad [\rho] = L^{-3}M, \quad [p] = L^{-1}T^{-2}M.$$

Выберем за основные единицы величины D, V, ρ, которые, как легко видеть, между собой независимы, так как удовлетворяют условию (25). Размерности μ и p в системе $(D,\ V,\ \rho)$ будут

$$\{\mu\} = DV\rho, \quad \{p\} = \rho V^2,$$

поэтому

$$p = \rho V^2 F\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{\mu}{DV\rho}\right).$$

F есть безразмерный коэффициент, зависящий от безразмерной (отвлеченной) величины

$$\frac{\mu}{DV\rho} = \frac{1}{R}.$$

Отвлеченная величина $R = \frac{DV\rho}{\mu}$ называется числом Рейнольдса. Это число играет большую роль при изучении динамики вязкой жидкости.

3) *Сопротивление прямоугольной пластинки.* Тонкая прямоугольная пластинка, двигаясь в жидкости поступательно, испытывает со стороны жидкости сопротивление. Сила сопротивления W зависит от размеров пластинки a и b, ее скорости v, угла θ между плоскостью пластинки и направлением ее поступательной скорости, давления жидкости p, плотности ρ и коэффициента вязкости μ, т. е.

$$W = f(a,\ b,\ \theta,\ v,\ p,\ \rho,\ \mu).$$

Вместо размеров пластинки a и b введем новые величины

$$\sigma = ab, \quad k = \frac{a}{b};$$

тогда

$$W = f_1(\sigma,\ v,\ \rho,\ p,\ \mu,\ k,\ \theta).$$

Размерности всех этих величин в системе LTM будут

$$[\sigma] = L^2, \quad [v] = LT^{-1}, \quad [\rho] = L^{-3}M, \quad [p] = L^{-1}T^{-2}M,$$
$$[\mu] = L^{-1}T^{-1}M, \quad [k] = 1, \quad [\theta] = 1, \quad [W] = LT^{-2}M.$$

Выберем за основные единицы величины σ, ρ, v, которые удовлетворяют условию (25) и, следовательно, между собой независимы; тогда размерности предыдущих величин в новой системе σ, ρ, v выразятся так:

$$[W] = \sigma\rho v^2, \quad [p] = \rho v^2, \quad [\mu] = \sigma^{\frac{1}{2}} v\rho; \quad [k] = [\theta] = 1;$$

отсюда

$$W = \sigma\rho v^2 F\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{\rho v^2}{p},\ \frac{\sigma^{\frac{1}{2}} v\rho}{\mu},\ k,\ \theta\right).$$

Величина F есть безразмерный коэффициент, зависящий от безразмерных аргументов

$$\theta,\ k = \frac{a}{b}, \quad M^2 = \frac{v^2}{\left(\sqrt{\frac{p}{\rho}}\right)^2}, \quad R = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}} v\rho}{\mu}.$$

Величина k есть удлинение пластинки, $M = \frac{v}{\sqrt{\frac{p}{\rho}}}$ (так называемое число Маха) есть отношение поступательной скорости пластинки к величине $\sqrt{\frac{p}{\rho}}$, равной скорости распространения звука в той среде, в которой движется пластинка; R есть число Рейнольдса, встречавшееся в предыдущем примере.

Таким образом, сопротивление пластинки выражается формулой

$$W = F(M,\ R,\ k,\ \theta)\,\sigma\rho v^2.$$

Эта формула первоначально была дана Ньютоном, который предполагал коэффициент F постоянным.

§ 32. Теория подобия механических систем

1. Теория подобия механических систем возникла из практического вопроса о сравнении условий работы двух геометрически подобных сооружений. Первоначальные исследования в этом направлении принадлежат Галилею, который в своих знаменитых «Discorsi» [1]) ставит вопрос о том, что весьма часто модель машины работает иначе, чем оригинал, и находит причину этого обстоятельства в различии возникающих во время движения сопротивлений. Основная теорема о механическом подобии дана Ньютоном в его «Математических принципах натуральной философии» (книга II, отдел 1, предложение 22), где на основании этой теоремы выводится закон сопротивления жидкости движущимся в ней телам.

Понятие «механическое подобие» гораздо сложнее, чем понятие «геометрическое подобие», потому что здесь приходится учитывать не только отношение соответственных линейных размеров, но и других величин, кинематических и динамических, обусловливающих движение сравниваемых механических систем; поэтому для того, чтобы две геометрически подобные механические системы (например, оригинал и модель какого-либо сооружения) были подобны механически, необходимо ввести еще ряд дополнительных условий.

2. Геометрическое и материальное подобие. Две системы точек $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ и $A_1',\ A_2',\ \ldots,\ A_n'$ называются *геометрически подобными*, если между точками этих систем можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы соответственные отрезки находились в постоянном отношении, т. е. чтобы было

$$\frac{A_iA_k}{A_i'A_k'} = \lambda \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

[1]) Есть русский перевод: Галилео Галилей, Беседы и математические доказательства. ГТТИ, М. — Л., 1934.

Из этого определения следует, что углы между соответственными отрезками равны, что какая-либо фигура, составленная из точек первой системы, подобна геометрически фигуре, составленной из соответственных точек второй системы, что отношение соответственных площадей есть λ^2, а соответственных объемов λ^3 и т. д.

Если точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ двух геометрически подобных систем снабжены массами (т. е. будут материальными точками) и если массы соответственных точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и $m_1', m_2', \ldots, m_n'$ находятся в постоянном отношении, т. е.

$$\frac{m_i}{m_i'}=\mu \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то такие системы материальных точек называются *материально подобными*. Простейшим примером материально подобных систем являются оригинал и модель какого-либо сооружения, в которых соответственные части сделаны из одного и того же материала (в этом случае $\mu=1$).

3. Кинематическое подобие. Геометрическое подобие двух систем точек (S) и (S') можно установить, сравнивая конфигурацию системы (S) в какой-либо момент t с конфигурацией системы (S') в другой момент t' (в частности, $t=t'$); эти моменты будем называть *соответственными моментами*. Если в частном случае системы (S) и (S') будут неизменяемыми, то геометрическое подобие этих систем, установленное для соответственных моментов t и t' (в частности, для одного момента), будет сохраняться все время, т. е. геометрическое подобие двух неизменяемых систем не нарушается. Но тем не менее две геометрически подобные неизменяемые системы могут двигаться относительно некоторой системы отсчета совершенно различно, с различными скоростями и ускорениями соответственных точек, которые могут описывать произвольные траектории; отсюда следует, что наличие геометрического подобия для последовательности соответственных моментов еще недостаточно для того, чтобы системы точек были подобны кинематически, т. е. чтобы одна система в увеличенном или уменьшенном виде копировала движение другой системы.

Для определения кинематического подобия двух точечных систем (S) и (S') будем рассматривать движение системы (S) относительно системы отсчета O и движение (S') относительно системы отсчета O', причем системы отсчета O и O' неподвижны относительно основной системы отсчета Ω; тогда (S) вместе с O, так же как (S') с O', будут представлять собой фигуры, изменяющиеся с течением времени, которые можно считать новыми точечными системами (OS) и $(O'S')$.

Если можно установить непрерывную последовательность соответственных моментов t и t' (считаемых от одного и того же

начального момента), для которых системы (OS) и $(O'S')$ будут геометрически подобны с постоянным, не зависящим от времени отношением подобия λ, причем соответственные моменты связаны между собой соотношением

$$t=\tau t', \tag{1}$$

где τ постоянно, то движущиеся системы (S) и (S') называются *кинематически подобными*.

Примечание. Если соответственные моменты t и t' считаются от различных начальных моментов t_0 и t_0', то соотношение (1) имеет вид

$$t-t_0=\tau\left(t'-t_0'\right). \tag{1'}$$

Из определения кинематического подобия двух систем (S) и (S') вытекают следствия:

1) Траектории соответственных точек двух кинематически подобных систем геометрически подобны с отношением подобия λ, равным отношению геометрического подобия движущихся систем в соответственные моменты времени.

Действительно, пусть координаты какой-либо точки A_i системы (S) относительно системы отсчета O в момент t будут x_i, y_i, z_i, а координаты соответственной точки A_i' кинематически подобной системы (S') относительно системы отсчета O' в соответственный момент t' будут x_i', y_i', z_i'; тогда, так как системы (OS) и $(O'S')$ в соответственные моменты времени, согласно определению, геометрически подобны, будем иметь

$$x_i(t)=\lambda x_i'(t'),\quad y_i(t)=\lambda y_i'(t'),\quad z_i(t)=\lambda z_i'(t') \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2}$$

для двух любых соответственных моментов t и t'. Следовательно, траектории соответственных точек A и A' будут геометрически подобны. Отсюда следует, что фигура, состоящая из совокупности траекторий точек системы (S), будет подобна геометрически фигуре, состоящей из траекторий соответственных точек системы (S').

2) В соответственные моменты времени модули скоростей соответственных точек двух кинематически подобных систем (S) и (S') находятся в постоянном отношении $\lambda\tau^{-1}$, а модули ускорений — в постоянном отношении $\lambda\tau^{-2}$, причем системы векторов скоростей и ускорений этих точек для различных моментов времени представляют собой геометрически подобные фигуры (конечно, при одинаковых масштабах построения).

В этом легко убедиться, дифференцируя равенства (2) один и два раза по t и принимая во внимание, что на основании (1)

$$dt=\tau\, dt'. \tag{3}$$

Имеем

$$\frac{dx_i}{dt}=\lambda\frac{dx'_i}{dt'}\frac{dt'}{dt}=\lambda\tau^{-1}\frac{dx'_i}{dt'}, \quad \text{или} \quad v_{ix}=\lambda\tau^{-1}v'_{ix'} \quad \text{и т. д.} \tag{4}$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\lambda\tau^{-1}\frac{d^2x'_i}{dt'^2}\frac{dt'}{dt}=\lambda\tau^{-2}\frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad \text{или} \quad w_{ix}=\lambda\tau^{-2}w'_{ix'}, \quad \text{и т. д.} \tag{5}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Из равенств (4) и (5) видно, что проекции скорости и ускорения соответственных точек на координатные оси систем O и O' в соответственные моменты находятся в постоянном отношении, а отсюда непосредственно следует, что и модули скоростей и ускорений находятся в том же отношении, а векторы скоростей и ускорений одинаково ориентированы относительно соответственных траекторий.

4. Механическое (или динамическое) подобие. Если две системы (S) и (S') подобны кинематически и материально, то такие системы называются *механически подобными*. Для механически подобных систем, вследствие их кинематического подобия, имеем для соответственных частиц и моментов

$$w_i=\lambda\tau^{-2}w'_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{6}$$

а вследствие материального подобия

$$m_i=\mu m'_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{7}$$

Перемножая равенства (6) и (7) с одинаковыми индексами, получим

$$m_iw_i=\lambda\tau^{-2}\mu\cdot m'_iw'_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8}$$

Принимая во внимание, что

$$m_iw_i=F_i, \quad m'_iw'_i=F'_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{9}$$

где F_i и F'_i суть модули сил, действующих в соответственные моменты на соответственные частицы двух механически подобных систем, находим из (8)

$$F_i=\varphi F'_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

где

$$\varphi=\lambda\tau^{-2}\mu \tag{11}$$

есть постоянное число. Итак, в механически подобных системах в соответственные моменты времени соответственные длины, модули соответственных скоростей, ускорений и сил находятся в постоянных отношениях, равных λ, $\lambda\tau^{-1}$, $\lambda\tau^{-2}$, $\lambda\tau^{-2}\mu$; кроме того, векторы сил, так же как и ускорений, одинаково ориентированы.

5. Теорема Ньютона. Пусть система (S) и система (S') удовлетворяют следующим условиям: 1) в соответственные начальные моменты t_0 и t'_0 система (S) материально подобна системе (S'); 2) в эти начальные моменты скорости соответственных точек систем (S) и (S') имеют пропорциональные модули и подобно расположены, т. е. пусть для соответственных начальных моментов t_0 и t'_0

$$v_{ix}=\lambda\tau^{-1}v'_{ix'}, \quad v_{iy}=\lambda\tau^{-1}v'_{iy'}, \quad v_{iz}=\lambda\tau^{-1}v'_{iz'} \tag{12}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$m_i=\mu m'_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{13}$$

и пусть, наконец, 3) силы, действующие на соответственные точки систем (S) и (S') в соответственные моменты движения этих систем t и t', имеют пропорциональные модули с постоянным отношением $\varphi=\lambda\tau^{-2}\mu$ и подобно расположены, т. е. пусть

$$F_{ix}=\lambda\tau^{-2}\mu F'_{ix'}; \quad F_{iy}=\lambda\tau^{-2}\mu F'_{iy'}; \quad F_{iz}=\lambda\tau^{-2}\mu F'_{iz} \tag{14}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

причем

$$t-t_0=\tau(t'-t'_0). \tag{15}$$

При соблюдении указанных трех условий системы (S) и (S') механически подобны.

Действительно, из условия 3) имеем, деля равенства (14) почленно на равенство (13):

$$w_{ix}=\lambda\tau^{-2}w'_{ix'} \quad \text{и т. д.} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{16}$$

или

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\lambda\tau^{-2}\frac{d^2x'_i}{dt'^2} \quad \text{и т. д.} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{16'}$$

Умножая равенство (16′) на $dt=\tau\,dt'$ и интегрируя, получим

$$\frac{dx_i}{dt}=\lambda\tau^{-1}\frac{d^2x'_i}{dt'}+a_i \quad \text{и т. д.} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{17}$$

Принимая во внимание, что для начальных моментов t_0 и t' имеют место равенства (12), получим, что все постоянные интегрирования равны нулю. Далее, умножая равенства (17) на $dt=\tau\,dt'$ и интегрируя еще раз, получим

$$x_i(t)=\lambda x'_i(t'), \quad y_i(t)=\lambda y'(t'), \quad z_i(t)=\lambda z'_i(t') \tag{18}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

причем постоянные интегрирования, в силу условия 1), обращаются в нуль. На основании равенств (18) заключаем, что системы (S) и (S') механически подобны (см. п. 4), что и требовалось доказать.

6. Ковариантность уравнений движения. Свойства механически подобных систем, которые дает теорема Ньютона, можно легко получить, исходя из соображений о размерности механических величин. Известно, что полная система уравнений, определяющих движение механической системы (S) под действием данной системы сил, может быть получена как следствие уравнения Даламбера — Лагранжа, которое иначе называется символическим уравнением динамики (см. § 5, п. 5 и §§ 7 и 8); это уравнение имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{3N}\left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)\delta x_\nu = 0. \tag{19}$$

Изменим линейные размеры системы (S) в λ раз; время, в течение которого система переходит из одного положения в другое — в τ раз; массы точек системы — в μ раз и силы, действующие на точки системы, — в $\varphi = \lambda\tau^{-2}\mu$ раз, т. е. сделаем преобразование

$$x_\nu = \lambda x'_\nu, \quad t = \tau t', \quad m_\nu = \mu m'_\nu, \quad X_\nu = \lambda\tau^{-2}\mu X'_\nu \tag{20}$$
$$(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N).$$

После преобразования (20) из системы (S) получится новая система (S'), которая будет механически подобна системе (S).

Так как на основании (20)

$$\delta x = \lambda\,\delta x', \quad \frac{dx}{dt} = \lambda\frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dx'}{dt'};$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\tau^{-1}\frac{d^2x'}{dt'^2}\frac{dt'}{dt} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2x'}{dt'^2},$$

то уравнение (19) перейдет в уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{3N}\left(X'_\nu - m'\frac{d^2x'_\nu}{dt'^2}\right)\delta x'_\nu = 0, \tag{19'}$$

т. е. в уравнение Даламбера — Лагранжа, а следовательно, и все выводимые из него уравнения движения будут *ковариантны* относительно преобразования (20).

Отсюда вытекает весьма важное следствие: движения двух механически подобных систем описываются одними и теми же уравнениями, причем параметры этих уравнений преобразуются по формулам (20); кинематические и динамические величины, характеризующие движения механически подобных систем, при переходе от одной системы к другой, получаются тем же преобразованием (20), которое, как мы видели в п. 4, можно считать определением механического подобия.

7. Преобразование механических величин. В § 31 было установлено, что характер зависимости какой-либо механической величины от основных единиц определяется размерностью этой величины. Пусть некоторая механическая величина для системы (S) имеет в абсолютной системе вид

$$Q = ql^\alpha t^\beta m^\gamma; \tag{21}$$

размерность этой величины, очевидно, будет

$$[Q] = L^\alpha T^\beta M^\gamma. \tag{22}$$

Чтобы получить значение той же величины для системы (S'), механически подобной системе (S), нужно сделать преобразование (20), т. е. заменить

$$l \to \lambda l, \quad t \to \tau t, \quad m \to \mu m; \tag{23}$$

тогда для системы (S') величина Q будет иметь значение

$$Q' = q\lambda^\alpha\tau^\beta\mu^\gamma l^\alpha t^\beta m^\gamma;$$

следовательно, численное значение величины Q для системы (S') будет

$$q' = q\lambda^\alpha\tau^\beta\mu^\gamma. \tag{24}$$

Формула (24) по своему виду похожа на формулу (17) § 31, но, конечно, имеет совсем другой смысл, так как здесь единицы меры не изменяются; однако число $\lambda^\alpha\tau^\beta\mu^\gamma$, на которое нужно умножить численное значение q для перехода к системе (S'), совпадает с коэффициентом перехода, благодаря чему можно установить вытекающее из этого обстоятельства очевидное правило.

8. Примеры. 1) *Прямолинейный осциллятор.* Пусть точка массы m движется прямолинейно под действием силы, притягивающей ее к неподвижному центру пропорционально расстоянию (прямолинейный осциллятор). Уравнение движения точки будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

где k есть квазиупругая постоянная. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = a\sin(\omega t + \varepsilon),$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ есть круговая частота колебания точки.

Для механически подобной системы будем иметь

$$m'\frac{d^2x'}{dt'^2} = -k'x' \quad \text{и} \quad x' = a\sin(\omega' t' + \varepsilon)$$

(a и ε — произвольные постоянные). Так как

$$[k] = \frac{\text{сила}}{\text{длина}} = T^{-2}M, \quad [\omega] = T^{-1},$$

то

$$k' = \tau^{-2}\mu k; \quad \omega' = \tau^{-1}\omega.$$

Чтобы механически подобный осциллятор имел ту же частоту, нужно, чтобы было $\tau = 1$, а следовательно,

$$k' = \mu k.$$

2) *Центральное движение*. Пусть точка массы m движется под действием центральной силы $F = fmMr^n$, притягивающей ее к неподвижной точке с массой M пропорционально n-й степени расстояния; f есть гравитационная постоянная. Для механически подобной системы будем иметь

$$F' = fm'M'r'^n,$$

откуда

$$\lambda\tau^{-2}\mu = \mu^2\lambda^n.$$

Из последнего уравнения имеем

$$\tau^2 = \lambda^{1-n}\mu^{-1}. \tag{25}$$

Если массы притягивающего центра и притягиваемой точки в обеих системах одинаковы, то $\mu = 1$ и

$$\tau^2 = \lambda^{1-n}.$$

В случае ньютонианского притяжения $n = -2$ и

$$\tau^2 = \lambda^3,$$

т. е. получаем 3-й закон Кеплера[1]).

Для ньютонианского закона притяжения формула (25) приобретает вид

$$\tau^2 = \frac{\lambda^3}{\mu}; \tag{25'}$$

поэтому, если бы плотности тел солнечной системы остались прежними, но их размеры, так же как и взаимные расстояния, изменились в λ раз, то, так как при этих условиях $\mu = \lambda^3$, мы имели бы, что

$$\tau = 1,$$

т. е. времена обращения остались бы прежними.

---

[1]) Для солнечной системы этот закон справедлив приближенно, если пренебречь различием в массах планет, малых по сравнению с массой Солнца (см. ч. I, § 37, п. 8).

9. Модели. Для изучения работы какого-либо проектируемого сооружения весьма часто пользуются изучением его модели, т. е. строят это сооружение в уменьшенном масштабе из тех же самых материалов, получая таким образом систему, материально подобную проектируемому сооружению, и экспериментально, путем измерения, определяют все требуемые величины, а из них, пользуясь методами теории подобия, находят соответствующие величины для этого сооружения в натуральных размерах.

При учете сил, действующих на различные части сооружения, нужно прежде всего принять во внимание веса его составных частей, которые в случае материального подобия изменяются пропорционально кубам линейных размеров; поэтому веса соответственных деталей двух материально подобных сооружений, так же как и их массы, имеют отношение λ^3. Следовательно, для осуществления механического подобия необходимо, чтобы и соответственные силы, действующие на детали, находились в том же отношении. Но это не всегда может быть достигнуто, так как некоторые силы (например, силы сопротивления, различные виды трения и пр.) изменяются при переходе от одной системы к другой, механически подобной, в ином отношении. В этом случае при построении модели для сохранения механического подобия приходится пожертвовать материальным подобием и подбирать соответствующим образом материалы деталей и условия их работы.

В дальнейшем будем предполагать простейший случай, когда все соответственные силы, так же как и веса, находятся в отношении λ^3. Тогда будем иметь

$$\mu = \lambda^3, \quad \lambda\tau^{-2}\mu = \lambda^3, \quad \text{откуда} \quad \tau = \lambda^{\frac{1}{2}}.$$

При этом предположении, на основании формулы (24) п. 7 для определения какой-либо величины Q проектируемого сооружения, нужно соответствующую величину q, найденную для модели, умножить на переходный коэффициент

$$\lambda^\alpha t^\beta \mu^\gamma = \lambda^\alpha \lambda^{\frac{\beta}{2}} \lambda^{3\gamma} = \lambda^{\alpha + \frac{\beta}{2} + 3\gamma},$$

следовательно,

$$Q = \lambda^{\alpha + \frac{\beta}{2} + 3\gamma} q. \tag{26}$$

Формула (26) выражает собой так называемое «правило Ньютона».

10. Примеры. 1) *Статические сооружения*. В статических сооружениях (например, мосты, фермы, краны) действующими силами обыкновенно являются силы тяжести, действующие на тела, которые эти сооружения поддерживают, следовательно, имеют место условия п. 9. Пусть напряжение в различных частях сооружения выражается величиной σ, причем

$$[\sigma] = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}} = L^{-1}T^{-2}M;$$

следовательно, $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$.

Подставляя эти значения в равенство (26), будем иметь соотношение между напряжениями в материально подобных сооружениях в виде

$$\Sigma = \lambda\sigma.$$

Отсюда вытекает положение довольно общего характера, что модель прочнее своего оригинала (конечно, при наличии материального подобия и при условии, что модель меньше оригинала).

2) *Двигатели*. Для двух материально подобных и механически подобных двигателей внутреннего сгорания (или паровых машин) скорости соответственных частей должны находиться в отношении $\lambda\tau^{-1}$, но так как при наших условиях $\tau = \lambda^{1/2}$, то это отношение должно быть равно $\sqrt{\lambda}$. Итак, соответственные скорости двух механически подобных двигателей пропорциональны квадратным корням из отношения их линейных размеров. При этом необходимо заметить, что для осуществления механического подобия давления в цилиндрах этих двигателей не могут быть произвольными. Так как давление p имеет размерность

$$[p] = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}} = L^{-1}T^{-2}M,$$

т. е. такую же, как напряжение, то переходный коэффициент, на основании равенства (26), равен λ, а следовательно,

$$P = \lambda p,$$

т. е. давления в цилиндрах механически подобных двигателей должны быть пропорциональны их линейным размерам. Отношение мощностей двигателей получится, если, принимая во внимание размерность мощности

$$[e] = \frac{\text{работа}}{\text{время}} = L^2T^{-3}M,$$

подставим в равенство (26) $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$; получим

$$E = \lambda^{7/2}e.$$

Практически интересно сравнить работу двух материально подобных двигателей при различном отношении давлений в их цилиндрах. Для этого мы должны отказаться от условия, что соответственные силы в двигателях пропорциональны λ^3, так как в этом случае наиболее существенной силой будет сила давления на поршень, которая

равна произведению давления на площадь поршня и будет пропорциональна $\pi\lambda^2$, где π есть отношение давлений; остальными силами (силами тяжести и вредными сопротивлениями) будем пренебрегать, так как в неподвижных двигателях веса отдельных частей достаточно уравновешены и предполагается хорошая смазка. Для механического подобия необходимо (см. п. 4), чтобы соответственные силы находились в отношении $\lambda\tau^{-2}\mu$, т. е. чтобы

$$\pi\lambda^2 = \lambda\tau^{-2}\mu,$$

причем вследствие материального подобия $\mu = \lambda^3$. Отсюда

$$\pi = \lambda^2\tau^{-2} = (\lambda\tau^{-1})^2,$$

т. е. соответственные скорости (см. п. 3) будут пропорциональны квадратным корням из давлений. Если давления в цилиндрах обоих двигателей одинаковы, т. е. $\pi = 1$, то линейные скорости равны. При $\pi = 1$ отношение угловых скоростей, или, что то же, чисел оборотов в минуту, равно $\tau^{-1} = \lambda^{-1}$, ибо $\tau = \lambda$; отношение мощностей будет

$$\lambda^2\tau^{-3}\mu = \lambda^2\lambda^{-3}\lambda^3 = \lambda^2.$$

3) *Сопротивление движению судов*. Суда при своем движении по воде испытывают сопротивление движению, которое при употребляемых скоростях можно считать пропорциональным квадрату скорости. Так как сопротивление движению судна пропорционально площади миделевого сечения и квадрату скорости, то сопротивления двух материально подобных судов пропорциональны

$$\lambda^2(\lambda\tau^{-1})^2 = \lambda^3$$

(здесь приняты во внимание условия п. 9 и то, что $\tau = \lambda^{1/2}$); следовательно, силы сопротивления также удовлетворяют условиям п. 9, а поэтому можно пользоваться формулой (26). Так как отношение скоростей двух механически подобных систем равно $\lambda\tau^{-1}$, а при условиях п. 9 $\tau = \lambda^{1/2}$, то отношение скоростей двух материально подобных судов будет равно $\lambda^{1/2}$. Отсюда вытекает так называемое правило Фруда: если какое-либо судно при скорости v имеет сопротивление R, то судно, материально подобное, при скорости $v\sqrt{\lambda}$ будет иметь сопротивление $R\lambda^3$, где λ есть отношение линейных размеров.

ЛИТЕРАТУРА

Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, изд. 2, 1952.
Кирпичев В. Л., Беседы о механике, изд. 4, 1950.
Крылов А. Н., Вибрация судов, 1936.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика, 1965.
Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. 2, изд. 5, 1955.
Лурье А. И., Аналитическая механика, 1961.
Розе Н. В., Динамика твердого тела, 1932.
Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, изд. 5, 1965.
Суслов Г. К., Теоретическая механика, изд. 3, 1946.
Хайкин С. Э., Физические основы механики, 1963.
Чаплыгин С. А., Механика системы, 1923—1924, а также в Собрании сочинений, т. IV, 1949.
Аппель П., Теоретическая механика, т. II, перев. с франц., 1960.
Валле Пуссен Ш. Ж., Лекции по теоретической механике, т. II, перев. с франц., 1949.
Вебстер А., Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, перев. с англ., 1933.
Голдстейн Г., Классическая механика, перев. с англ., 1957.
Ламб Г., Теоретическая механика, т. 2 и т. 3, перев. с англ., 1936.
Леви-Чивита Т. и Амальди У., Курс теоретической механики, т. II, ч. I и ч. 2, перев. с итал., 1952.
Планк М., Введение в теоретическую физику, ч. 1, Общая механика, перев. с нем., 1933.
Поль Р., Введение в механику и акустику, перев. с нем., 1933.
Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, перев. с англ., 1937.

По теории гироскопа

Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, изд. 2, 1956.
Ишлинский А. Ю., Механика гироскопических систем, 1963.
Крылов А. Н. и Крутков Ю. А., Общая теория гироскопов, 1932.
Граммель Р., Гироскоп, его теория и применение, т. I и II, перев. с нем., 1952.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ